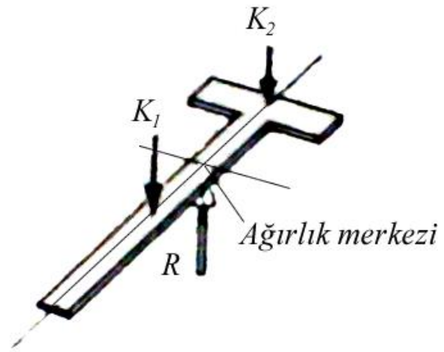
STATİK (2. Hafta)

AĞIRLIK MERKEZİ

Ağırlık merkezi: Bir cismi oluşturan herbir parçaya etki eden yerçeki kuvvetlerinin bileşkesinin cismin üzerinden geçtiği noktaya Ağırlık Merkezi denir.



Şekil. Ağırlık merkezi cisim üzerindeki parçaların bileşke kuvvetidir.

Genel ağırlık formülü: Yerçekimi kuvvetleri birbirine paralel kuvvetlerdir. Böylece ağırlık merkezini bulmak paralel kuvvetlerin bileşkesini bulma problemi ile aynı olmu olur. Buna göre ağırlık merkezinin koordinatları şu şekilde bulunur.

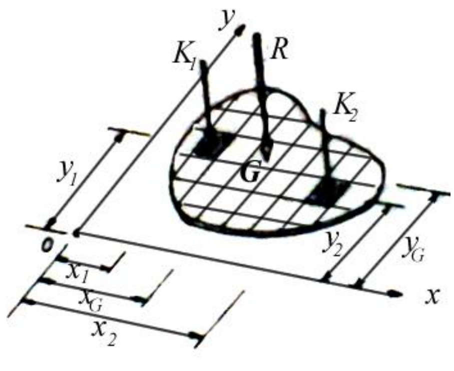
$$\Sigma F = F_1 + F_2 + F_3 + \dots$$

$$\Sigma F.x = F_1.x_1 + F_2.x_2 + F_3.x_3 + \dots$$

$$\Sigma F.y = F_1.y_1 + F_2.y_2 + F_3.y_3 + \dots$$

$$\left[x_G = \frac{\Sigma F.x}{\Sigma F}\right]$$

$$\left[y_G = \frac{\Sigma F.y}{\Sigma F}\right]$$



Şekil. Ağırlık merkezinin hesaplanması.

Cisim plaka şeklinde ise: Eğer cisim sabit kalınlığa sahip ise bu durumda formüllerimiz alana bağlı olarak şu şekle dönüşür. Burada cismin alanı (A), kalınlığı (d), yoğunluğu (γ) ise oluşan yerçekimi kuvveti F= A. d. γ olacaktır.

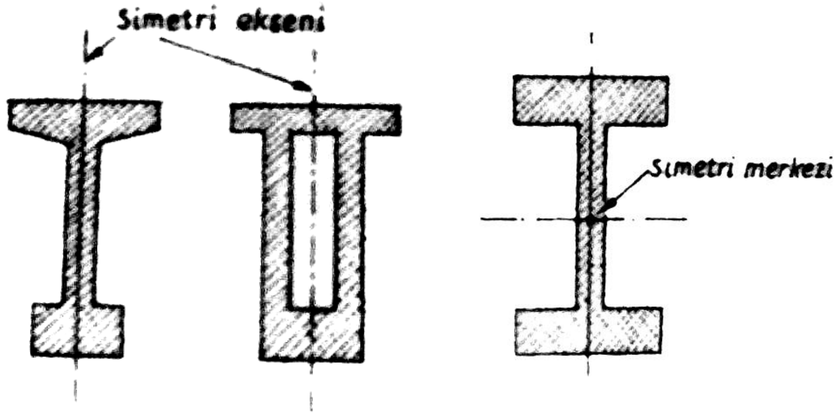
$$x_G = \frac{\Sigma F.x}{\Sigma F} = \frac{\Sigma(A_i.\cancel{d.\gamma}).x_i}{\Sigma A_i.\cancel{d.\gamma}} = \frac{\Sigma A_i.x_i}{\Sigma A_i}$$

$$y_G = \frac{\Sigma F.y}{\Sigma F} = \frac{\Sigma(A_i.\cancel{d.\gamma}).y_i}{\Sigma A_i.\cancel{d.\gamma}} = \frac{\Sigma A_i.y_i}{\Sigma A_i}$$

Cisim çubuk şeklinde ise: Aynı mantıkla eğer cisimlerimiz homojen çubuklardan oluşuyor ise ağırlık merkezlerini boya bağlı olarak bulabiliriz.

$$x_G = \frac{\Sigma L.x}{\Sigma L}, \qquad y_G = \frac{\Sigma L.y}{\Sigma L}$$

Simetrik cisimler: Homojen bir cismin simetri ekseni var ise bu eksen aynı zamanda ağırlık merkezinden geçer.



Şekil. Simetrik cisiimlerin ağırlık merkezi simetri ekseni üzerindedir.

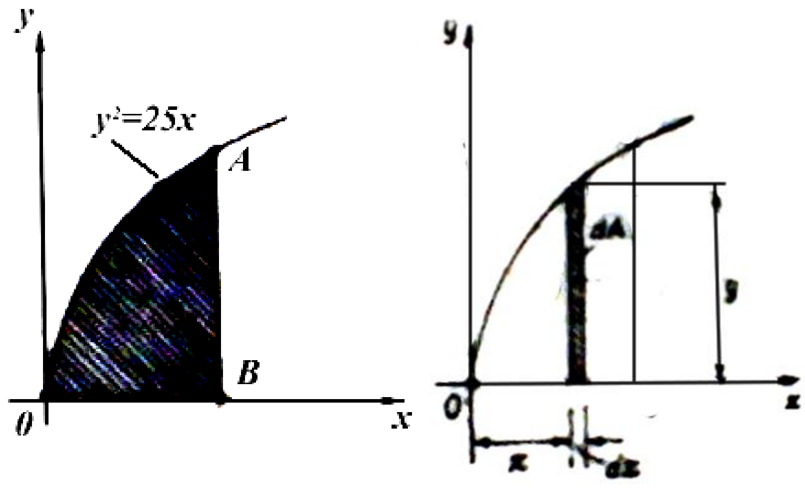
Cisim bir fonksiyon şeklinde verildiyse: Eğer cismin şekli bir fonksiyon halinde verildi ise ağırlık merkezide diferansiyel elemanların integrali alınarak aşağıdaki formüllerle bulunabilir.

Fonksiyon kütleye bağlı ise: $x_G = \frac{\int x\, dm}{\int dm}$, $y_G = \frac{\int y\, dm}{\int dm}$

Fonksiyon hacme bağlı ise: $x_G = \frac{\int x\, dV}{\int dV}$, $y_G = \frac{\int y\, dV}{\int dV}$

Fonksiyon yüzeye bağlı ise: $x_G = \frac{\int x\, dA}{\int dA}$, $y_G = \frac{\int y\, dA}{\int dA}$

Fonksiyon boya bağlı ise: $x_G = \frac{\int x\, dL}{\int dL}$, $y_G = \frac{\int y\, dL}{\int dL}$

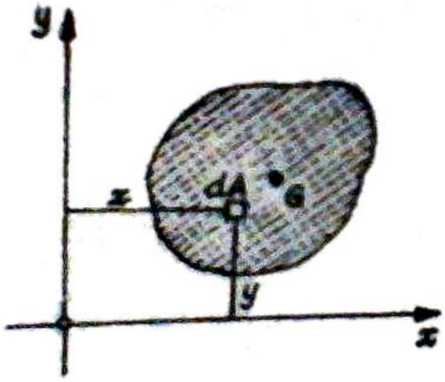


Şekil. Cismin şekli fonksiyon şeklinde verilirse diferansiyel elaman kullanarak ağırlık merkezi hesaplanabilir.

Statik Moment: Düzlem bir yüzeyin ağırlık merkezinin bir eksene uzaklığı ile yüzeyin alanının çarpımı yüzeyin o eksene göre *statik momenti* denir. Cismin statik momenti aşağıdaki gibi farklı formüllerle hesaplanabilir.

x eksenine göre statik moment: $x_G .A = \int x\, dA = \Sigma xA = x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3 + ...$

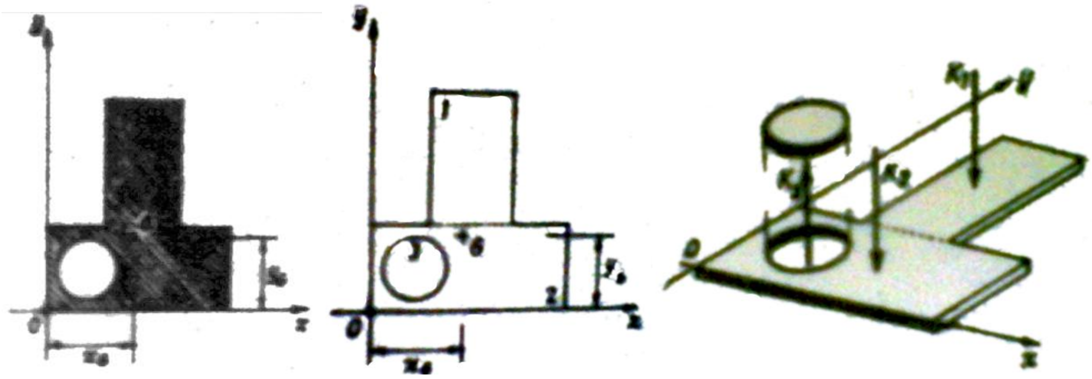
y eksenine göre statik moment: $y_G . A = \int y \, dA = \Sigma yA = x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3 + ...$



Şekil. Statik moment alan ile ağırlık merkezinin eksen uzaklığı çarpımı ile bulunur.

Birleşik şekillerin ağırlık merkezinin bulunması: Birleşik şekil, önce ağırlık merkezleri bilinen belli parçalara ayrılır. Sonra uygun şekilde seçilen eksen takımına göre aşağıdaki genel ağırlık formülü kullanılarak bulunabilir. Şekil içerisindeki boşluklar yerçekimine ters yönde kuvvet olarak düşünülebilir. Boşluklar işleme konurken toplama yerine çıkartılır.

$$\left[x_G = \frac{\Sigma F.x}{\Sigma F}\right] \qquad \left[y_G = \frac{\Sigma F.y}{\Sigma F}\right]$$

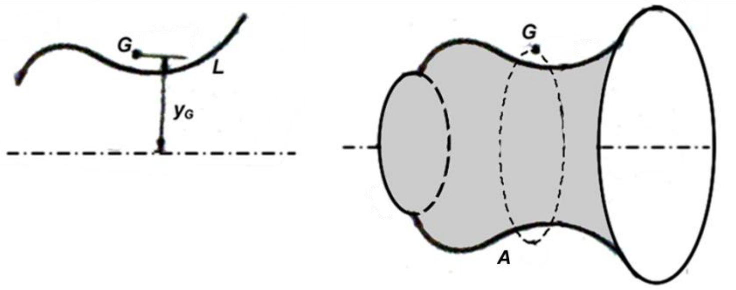


Şekil. Karmaşık şekillerin ağırlık merkezi basit şekillere bölünerek bulunur.

Papus-Guldin Teoremleri:

<u>Birinci Teorem (çizgiden yüzey eldesi):</u> Bir düzlem üzerindeki eğrinin kendi düzlemi içinde fakat kendini kesmeyen bir eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanı, eğrinin uzunluğu ile dönme sırasında ağırlık merkezinin katettiği yolun çarpımına eşittir. L çizginin boyu, y_G çizginin ağırlık merkezinin dönme eksenine uzaklığı olmak üzere oluşan dönel yüzeyin alanı A olur ve şu förmülle bulunur.

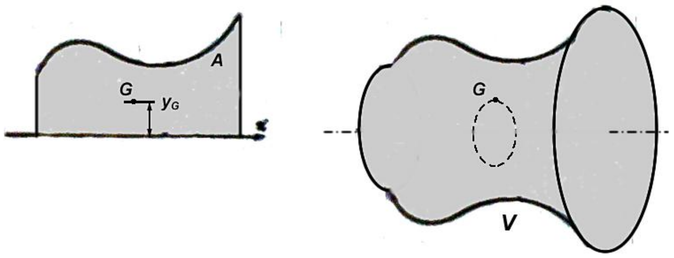
$$A = 2\pi . y_G . L$$



Şekil. Çizgi eksen etrafında döndürüldüğünde yüzey elde edilir.

<u>İkinci Teorem (alandan hacim eldesi)</u>: Dülem bir yüzeyin kendi düzlemi içinde fakat kendini kesmeyen bir eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmi yüzeyin alanı ile dönme sırasında yüzeyin ağırlık merkezinin katettiği yolun çarpımına eşittir. Buna göre dönel cismin hacmi;

$$V = 2\pi . y_G . A$$



Şekil. Alan eksen etrafında döndürüldüğünde hacim elde edilir.

ÇÖZÜMLÜ ÖRNEKLER

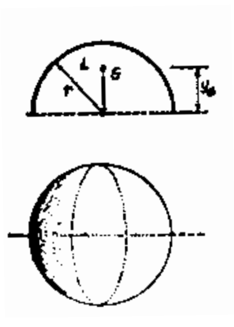
Örnek 1

Şekildeki yarım çember yayının ağırlık merkezini bulunuz.

Çözüm: Pappus-Guldin teoremini kullanalım. Yarım çemberi eksen etrafında çevirdiğimizde kürenin yüzey alanını elde ederiz ($4\pi r^2$). Aynı şekilde kürenin yüzey alanı, yarım çemberin boyu ile ağırlık merkezi döndüğünde oluşan çemberin çarpımına da eşittir (Pappus-Guldin). Buna göre;

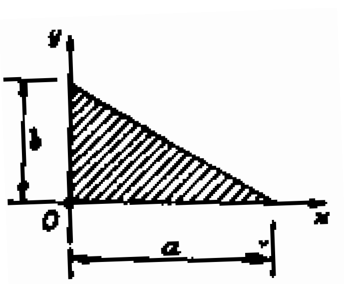
[Küre yüze Alanı] = [Yarım çember boyu] * [yarım çemberin ağırlık merkezinin oluşturduğu tam çember]

$4\pi r^2 = [2.\pi.r/2].[2.\ \pi.y_G] \Rightarrow y_G = 2r/\ \pi$ olur.

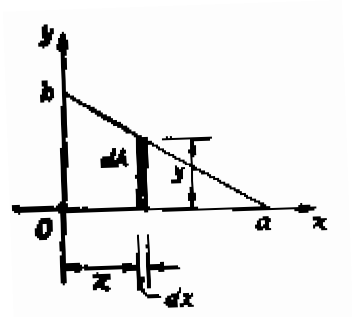


Örnek 2

Şekildeki dik üçgenin ağırlık merkezini bulunuz.



Çözüm:



$$\frac{b}{y} = \frac{a}{a-x} \rightarrow y = \frac{b}{a}(a-x)$$

$$dA = y dx$$

$$S_y = \int dA.x = \int xy dx$$

$$S_y = \frac{b}{a}\int_0^a (ax - x^2)\, dx = \frac{a^2 b}{6}$$

Üçgenin alanı :

$$A = \frac{ab}{2}$$

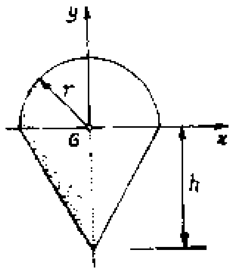
üçgenin ağırlık merkezinin koordinatları

$$x_G = \frac{S_y}{A} = \frac{a^2 b}{6}\ \frac{2}{ab} = \frac{a}{3}$$

Aynı şekilde y ekseni içinde değerler bulunur.

Örnek 3

Şekildeki yüzeyin ağırlık merkezinin x ekseni üzerinde olmas için ikizkener üçgenin h yüksekliği ne kadar olmalıdır.



Çözüm:

Yarım daire ve üçgenin alanları sırasile A_1, A_2 ve ağırlık merkezlerinin x ekseninden olan uzaklıkları y_{g1}, y_{g2} olsun. Böylece

$$A_1 \cdot y_{g1} = A_2 \cdot y_{g2}$$

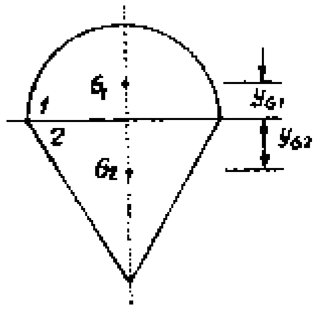
olmalıdır. Yani

$$\frac{\pi r^2}{2} \cdot \frac{4r}{3\pi} = \frac{2rh}{2} \cdot \frac{h}{3}$$

yazılabilir. Buradan

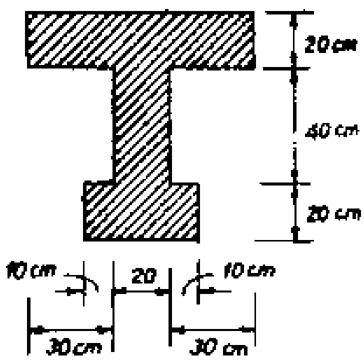
$$h = 1{,}41\, r$$

bulunur.

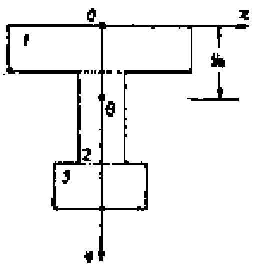


Örnek 4

Şekildeki kesitin ağırlık merkezini bulunuz.



Çözüm: x,y eksen takımı şekilde görüldüğü gibi seçilirse, kesit y eksenine göre simetrik olduğundan x_g=0 dır.



No	A_i	y_i	$A_i\, y_i$
1	16,0	1,0	16,0
2	8,0	4,0	32,0
3	8,0	7,0	56,0
Toplam	32,0		104,0

Böylece ağırlık merkezinin ordinatı

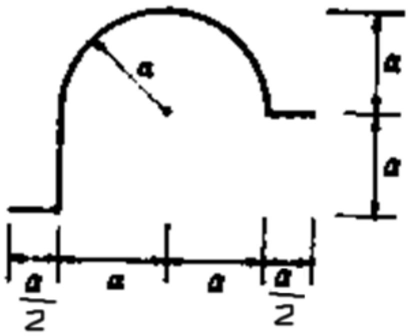
$$y_g = \frac{\Sigma A_i y_i}{\Sigma A_i}$$

$$y_g = \frac{104{,}0}{32{,}0} = 3{,}25 \text{ dm} = 32{,}5 \text{ cm.}$$

olarak bulunur.

Örnek 5

Şekilde görülen eğrinin ağırlık merkezini bulunuz (a=8 cm)



Çözüm:

Eğri şekilde görüldüğü gibi 4 parçaya bölünebilir.

$$y_3 = a + \frac{2a}{\pi} = 1{,}637\, a$$

olmak üzere, seçilen eksen takımına göre herbir parçanın ağırlık merkezinin apsis ve ordinatları tabloda verilmiştir.

No		L_i	x_i	y_i	$L_i\, x_i$	$L_i\, y_i$
1	AB	$a/2$	$-5a/4$	0	$-5a^2/8$	0
2	BC	a	$-a$	$a/2$	$-a^2$	$a^2/2$
3	CD	πa	0	$1{,}637\, a$	0	$5{,}13\, a^2$
4	DE	$a/2$	$5a/4$	a	$5a^2/8$	$a^2/2$
Toplam		$5{,}14a$			$-a^2$	$6{,}13\, a^2$

Böylece

$$x_s = \frac{\Sigma L_i x_i}{\Sigma L_i} = \frac{-a^2}{5{,}14a} = -0{,}194a$$

$$y_s = \frac{\Sigma L_i y_i}{\Sigma L_i} = \frac{6{,}13\,a^2}{5{,}14\,a} = 1{,}19a$$

olarak bulunur.

Sayısal uygulama :

$a = 8$ cm için

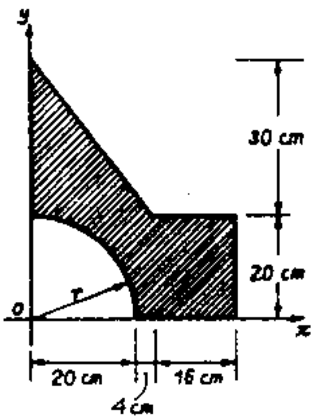
$x_s = -0{,}194 \times 8 = -1{,}55$ cm

$y_s = 1{,}19 \times 8 = 9{,}52$ cm

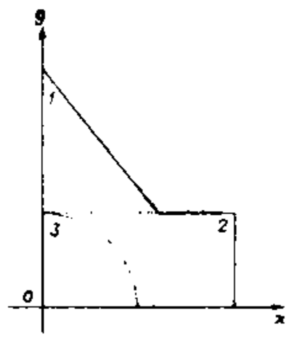
bulunur.

Örnek 6

Şekildeki yüzeyin a) ağırlık merkezini bulunuz, b) y ekseni etrafında dönmesinden oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.



Çözüm:



No	A_i	x_i	y_i	$A_i x_i$	$A_i y_i$
1	3,6	0,8	3,0	2,88	10,80
2	8,0	2,0	1,0	16,00	8,00
3	—3,14	0,85	0,85	—2,67	—2,67
Toplam	8,46			16,21	16,13

$$x_g = \frac{\Sigma A_i x_i}{\Sigma A_i} = \frac{16{,}21}{8{,}46} = 1{,}92 \text{ dm}$$

$$y_g = \frac{\Sigma A_i y_i}{\Sigma A_i} = \frac{16{,}13}{8{,}46} = 1{,}91 \text{ dm}$$

b) Pappus teoreminden :

$$V_y = 2\pi \,.\, A \,.\, x_g$$

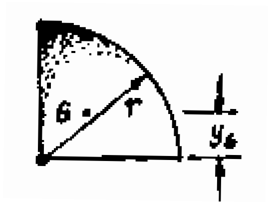
$$= 6{,}28 \,.\, 8{,}46 \times 1{,}92 = 102{,}01 \text{ dm}^3$$

CEVAPLI SORULAR

Soru 1

Şekildeki çeyrek dairenin ağırlık merkezini bulunuz.

Kürenin hacmi $\frac{4}{3}\pi r^3$



Cevap: $y_g = \frac{4r}{3\pi}$

Soru 2

Şekilde görülen eğrinin

a) Ağırlık merkezinin x1 eksenine olan uzaklığını bulunuz.
b) Bu eğrinin x1 ekseni etrafında 180^0 dönmesiyle oluşan yüzeyin alanını hesaplayınız.