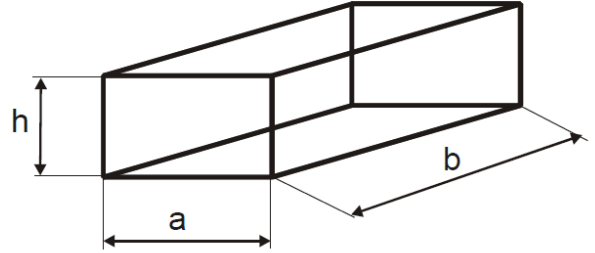




1. Bir fabrikada üretilen ürünün maliyetinin enflasyon oranı (x_1) ve dolar kuruna (x_2) bağlı olarak $f(x) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2 + 8x_2$ şeklinde değiştiği görülmüştür. Buna göre ürünün maliyetini en düşük seviyede tutmak için enflasyon ve dolar kurları hangi değerlerde olmalıdır?

2. Şekildeki gibi çelik konstrüksiyonla yapılacak bir kafes yapının iç hacmi 850 m³ ve b uzun kenarının a kısa kenarının iki katı olması istenmektedir. h ile gösterilen dikey kolanlarda 200 lük kare profil kullanılacak ($h = \square$ metre fiyatı 30 TL). a ile gösterilen kısa kenarlarda ise 100 lük köşebent kullanılacaktır ($a = \square$ metre fiyatı 20 TL). b ile gösterilen uzun kenarlarda ise 160 lük I profil kullanılacaktır ($b = \square$ metre fiyatı 40 TL). Bu yapıyı istenilen hacimde en ucuz maliyetle inşa edebilmemiz için a, b ve h uzunluklarını ne almalıyız?



3. Amaç fonksiyonu $\min f(x) = -2x_1 - x_2$ olan bir optimizasyon probleminde kısıtlar $g_1(x) = 2x_1 + 5x_2 \leq 10$, $g_2(x) = 4x_1 + x_2 \leq 4$, $x_1 \geq 0$ ve $x_2 \geq 0$ şeklinde verilmiştir. Buna göre amaç fonksiyonumuzu minimum yapan x_1 ve x_2 değerlerini bulunuz.

4. $f(x) = x^3 - 3x + 1$ denklemini sıfır yapan x değerini bulmamız isteniyor. Analitik çözümünü bilmediğimiz bu denklemin kökünü Newton-Raphson metodunu kullanarak 0,00001 hassasiyete kadar inerek bulunuz.

(Sorular eşit ve 25 er puandır. Süre 75 dk. Başarılar.. İ.Çayıroğlu)

CEVAPLAR

GÖZÜMLER

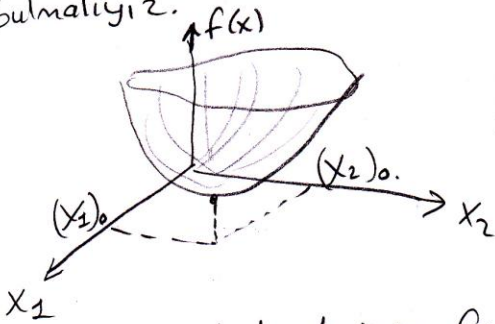
① Fonksiyonumuz;

$$f(x) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2 + 8x_2$$

Sevkiyededir. Dikkat ederek fonksiyon iki değişkenlidir. (x_1, x_2) . Dolayısı ile Maks/Min bulmak için Hessian matris yöntemini kullanmalıyız.

Gerek şart:

Bu yöntemde öncelikle maks/min'leri olduğu yeri veren sabit noktaları bulmalıyız. Yani $x_0 = ((x_1)_0, (x_2)_0)$ bulmalıyız.



bu değerleri bulmak için fonksiyonumuz her bir değişken için türevi alacağız ve sıfıra eşitleyebiliriz. Ortaya çıkan türev denklemleri kendi içlerinde eşitler sabit değerleri bulacağız. ve bu noktalarda Ekstreum var yada yok diyeceğiz.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow 6x_1 - 2x_2 = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow -2x_1 + 10x_2 + 8 = 0.$$

Bu iki denklemin ortak çözümünden x_1, x_2 yi bulabiliriz.

$$\begin{array}{r} 6x_1 - 2x_2 = 0 \\ 3 \cdot -2x_1 + 10x_2 = -8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6x_1 - 2x_2 = 0 \\ -6x_1 + 30x_2 = -24 \end{array}$$

$$28x_2 = -24$$

$$x_2 = -\frac{24}{28} = -0,857$$

$$6x_1 - 2(-0,857) = 0$$

$$6x_1 + 1,714 = 0$$

$$x_1 = -0,285$$

Bu noktalar Ekstreumun olduğu (eğer varsa) sabit noktalardır.

$$(x_0) = \begin{cases} (x_1)_0 = -0,285 \\ (x_2)_0 = -0,857 \end{cases} \text{ olur.}$$

Yeter şart:

Eğer fonksiyonun ekstreumu varsa, olduğu yer bu iki koordinatın kesiştiği yerdedir. Olmayabilir de.

Bunun için yeter şart olarak Hessian matrisine bakmalıyız.

Hessian matrisi bize 3 durum verecektir. Bunlar;

• $Hf(x) > 0 \Rightarrow$ Pozitif tanımlı ise $(x_1)_0$ ve $(x_2)_0$ noktalarında minimum vardır.

• $Hf(x) < 0 \Rightarrow$ Negatif tanımlı ise $x_0 = ((x_1)_0, (x_2)_0)$ da maksimum vardır.

• $Hf(x) = 0 \Rightarrow$ Tanımsızdır. x_0 olduğu yer bölünmüş noktadır.

Simdi Hessian matrisinin Pozitif, negatif yada tanımsız olması nasıl olmaktadır, ora bakalım.

- x_i için $\det A_i > 0$ ise Pozitif tanımlıdır.
- x_i için $(-1)^i \det A_i > 0$ ise Negatif tanımlı.
- Diğer durumlarda tanımsız yani x_0 olduğu yer bölünm noktasıdır.

Burada A_i ler Hessian matrisinin alt matrisleridir. Dolayısıyla $\det A_i$ lere Alt matrislerin determinantları olacaktır.

Simdi Once Hessian matrisini bulalım ardından alt matrislerini çıkarp bunların determinantları alalım.

Hessian matrisinin tanımı

$$Hf(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

Şeklinde bir matristir. Bu matris simetrik çıkmak zorundadır. Yoksa ekranı aramıyoruz. Bizim problemimize uygularsak

$$Hf(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}_{2 \times 2} \text{ olur}$$

Elementlerini bulalım.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} (6x_1 - 2x_2) = \underline{6}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} (-2x_1 + 10x_2 + 8) = \underline{-2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial}{\partial x_2} (-6x_1 - 2x_2) = \underline{-2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial}{\partial x_2} (-2x_1 + 10x_2 + 8) = \underline{10}$$

$$Hf(x) = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 10 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \text{ olur.}$$

Alt matrisleri bulalım.

$$A_1 = [6]$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 10 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

determinantlarını alalım, Determinant alma tek bir depere dönüşür.

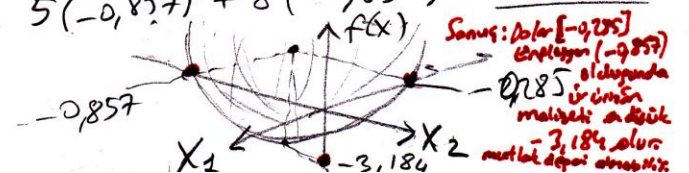
$$\det A_1 = 6 \text{ olur}$$

$$\det A_2 = (6 \cdot 10) - (-2) \cdot (-2) = 56 \text{ olur.}$$

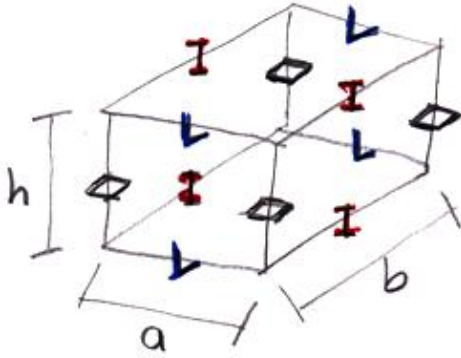
x_i için $\det A_i > 0$ olduğu için Pozitif tanımlıdır. $x_0 = (-0,285, -0,857)$

noktasında bir minimuma sahiptir. O noktada fonksiyonun değeri ise

$$f(x_0) = 3(-0,285)^2 - (-0,285) \cdot (-0,857) + 5(-0,857)^2 + 8(-0,857) = \underline{-3,184}$$



- ② Kafes yapı üzerindeki profil seçimleri aşağıdaki gibidir.



tasarımda 3 tane değişken vardır $[h, a, b]$ fakat b tane a nın ile katı olması istendiği için $b=2a$ eşitliğini kullanarak 2 değişkene $[h, a]$ düşürebiliriz.

Bu durumda amaç fonksiyonumuz

$$\begin{aligned} \min f(x) &= 4h \cdot 30 + 4a \cdot 20 + 4b \cdot 40 \\ &= 120h + 80a + 160b \\ &= 120h + 80a + 160(2a) \\ &= 120h + 80a + 320a \end{aligned}$$

$$\min f(x) = 120h + 400a \text{ olur.}$$

Kısıtlarımızı yazalım.

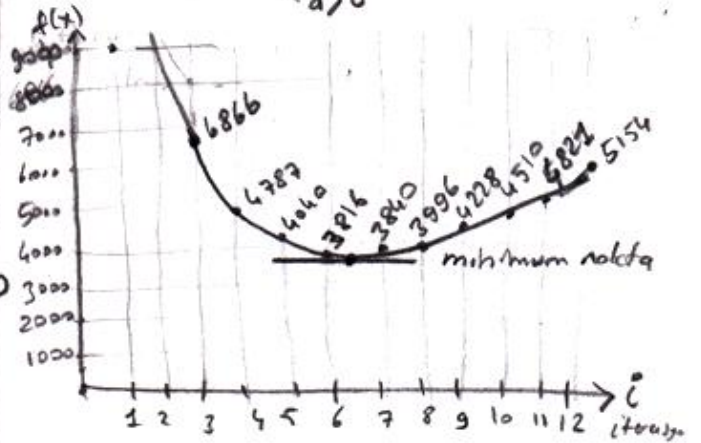
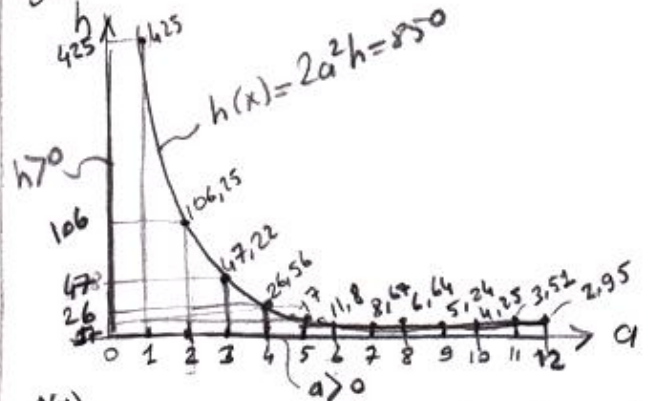
eşitlik kısıtlarını $h(x)$, eşitsizlik kısıtlarını $g(x)$ ile gösterelim.

$$\begin{aligned} h(x) &= a \cdot b \cdot h = 850 \text{ m}^3 \\ a \cdot (2a) \cdot h &= 850 \\ 2a^2h &= 850 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

$$g_1(x) \quad a > 0$$

$$g_2(x) \quad h > 0$$

Kısıtlarımızı grafiğe üzerinde gösterelim.



Görüm aralığı içerisinde hangi noktanın amaç fonksiyonunu daha küçük yaptığını bulalım.

i iterasyon	a	h	f(x) = 120h + 400a
1	1	425	= 51.600
2	2	106,25	= 13.550
3	3	47,22	= 6.866
4	4	26,56	= 4.787
5	5	17	= 4.040
6	6	11,8	= 3.816
7	7	8,67	= 3.840
8	8	6,64	= 3.996
9	9	5,24	= 4.228
10	10	4,25	= 4.510
11	11	3,52	= 4.821
12	12	2,95	= 5.154

En düşük maliyet noktası

$$\boxed{a = 6 \text{ m}} \quad \boxed{b = 12 \text{ m}} \quad \boxed{h = 11,8 \text{ m}} \text{ olursa}$$

③

Amaç fonksiyonu

$$\min f(x) = -2x_1 - x_2$$

Kısıtlar

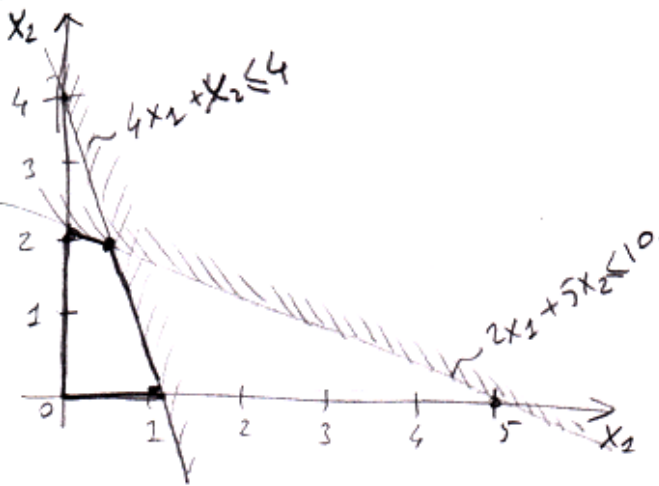
$$g_1(x) = 2x_1 + 5x_2 \leq 10$$

$$g_2(x) = 4x_1 + x_2 \leq 4$$

$$g_3(x) = x_1 \geq 0$$

$$g_4(x) = x_2 \geq 0$$

Kısıtlarımızı grafik üzerinde gösterelim.



grafik üzerine çizilebilen için doğruların eksenleri kestiği noktaları bulmalıyız.

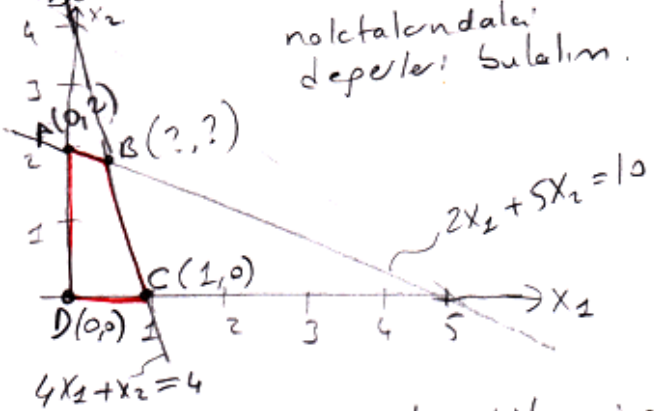
$$2x_1 + 5x_2 = 10$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1=0 \text{ için } x_2=2 \\ x_2=0 \text{ için } x_1=5 \end{array} \right\} \text{ s.ker.}$$

$$4x_1 + x_2 = 4$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1=0 \text{ için } x_2=4 \\ x_2=0 \text{ için } x_1=1 \end{array} \right\} \text{ s.ker.}$$

Grafikte geçerli olan bölgede amaç fonksiyonunun değerlerine bakalım. Bunun için A, B, C, D noktalarındaki değerleri bulalım.



B noktasının değerleri bilinmiyor. iki fonksiyonun ortak çözümünden kesim noktasını bulabiliriz.

$$\begin{array}{r} 2 / 2x_1 + 5x_2 = 10 \\ -1 / 4x_1 + x_2 = 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4x_1 + 10x_2 = 20 \\ -4x_1 - x_2 = -4 \end{array}$$

$$9x_2 = 16 \Rightarrow x_2 = 1,777$$

$$2x_1 + 5(1,777) = 10$$

$$x_1 = 0,555$$

$$B(x_1, x_2) = B(0,555, 1,777)$$

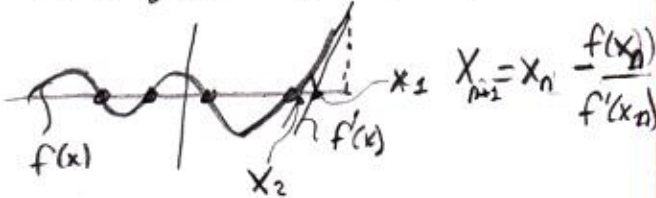
Bu noktalarındaki değerleri amaç fonksiyonunda yerine yerelim ve min. olan değeri bulalım.

Noktalar	x_1	x_2	$f(x) = -2x_1 - x_2$
A	0	2	-2
B	0,555	1,777	-2,887
C	1	0	-2
D	0	0	0

Amaç fonksiyonunun min yapan değeri $B(0,555, 1,777)$ dir.

④ Newton-Raphson metoduyla köklerinden birini bulacağız. Denklem $f(x) = x^3 - 3x + 1$ dir.

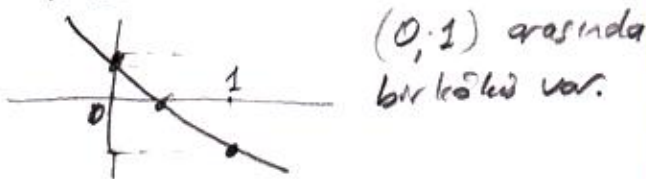
Newton yöntemi türev yöntemini kullanarak hızlı bir şekilde köke yakınsayan bir yöntemdir.



Öncelikle kökün bulunacağı bir aralık bulalım. Bunu yapmakta şart değildir. Dinde tahmini bir sayıdan da başlayabiliriz.

$$x=0 \text{ için } f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 + 1 = 1$$

$$x=1 \text{ için } f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 1 = -1$$



① $x_1 = 0$ değerini seçerek yakın kök bulalım.

$$f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0 - 0 + 1 = 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = -3$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0 - \frac{1}{-3} = 0,3333$$

$$\textcircled{2} x_1 = 0,33333 \quad f(x_2) = (0,33333)^3 - 3 \cdot (0,33333) + 1 = 0,0370459$$

$$f'(x_2) = 3 \cdot (0,33333)^2 - 3 = -2,666673$$

$$x_2 = 0,33333 - \frac{0,0370459}{-2,666673} = 0,347225$$

$$\textcircled{3} x_1 = 0,347225$$

$$f(x_2) = (0,347225)^3 - 3 \cdot (0,347225) + 1 = 0,000188251$$

$$f'(x_2) = 3 \cdot 0,347225^2 - 3 = -1,958325$$

$$x_2 = 0,347225 - \frac{0,000188251}{-1,958325} = 0,34732112$$

$$\textcircled{4} x_1 = 0,34732112$$

$$f(x_2) = (0,34732112)^3 - 3 \cdot (0,34732112) + 1 = -0,0000653324$$

Bu hassasiyeti yeterli kabul edebiliriz.

Dolayısıyla denklemin sıfır (0) yapan köklerinden

$$x = \underline{0,34732112} \text{ alabiliriz.}$$

Aşamaları Tablo şeklinde gösterelim

n	x_n	$f(x_n) = x_n^3 - 3x_n + 1$	$f'(x_n) = 3x_n^2 - 3$	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
1	0	-1	-3	0,33333
2	0,33333	0,0370459	-2,666673	0,347225
3	0,347225	0,000188251	-1,958325	0,34732112
4	0,34732112	-0,0000653324		

Bu hassasiyet yeterli kabul edilebilir. Daha fazla değeri değiştirilmedi. Gerçek değer olarak burası 0 olmalıdır.