

MAKİNE DİNAMİĞİ (8. Hafta)

MEKANİK SİSTEMLERİN DİNAMİK KUVVET ANALİZİ

A) Atalet Kuvveti ve Atalet Momenti Oluşturan İvmelerin Vektörel Tablosu

Hareket halindeki bir mekanizma üzerinde statik kuvvetlerin yanında atalet kuvvetleride vardır. Atalet kuvvetlerini ise ivmeler doğurur. İvme ise bir hareketin hızlanması yada yavaşlaması olayıdır. Sabit hızlı bir hareket varsa ivme yoktur dolayısı ile atalet kuvveti de üretmez.

Açısal ivmeler atalet momenti üretir ($M=I_m \cdot \alpha$). Ağırlık merkezindeki doğrusal ivmeler ise atalet kuvveti üretir ($F=ma_G$). Dolayısı ile dinamik kuvvetleri yada atalet kuvvetlerini hesaplamadan önce α ve a_G ivmelerini bilmemiz gerekir. Bir önceki ders notlarında 4 çubuk mekanizmasına ait bu ivmeleri bulmuştuk.

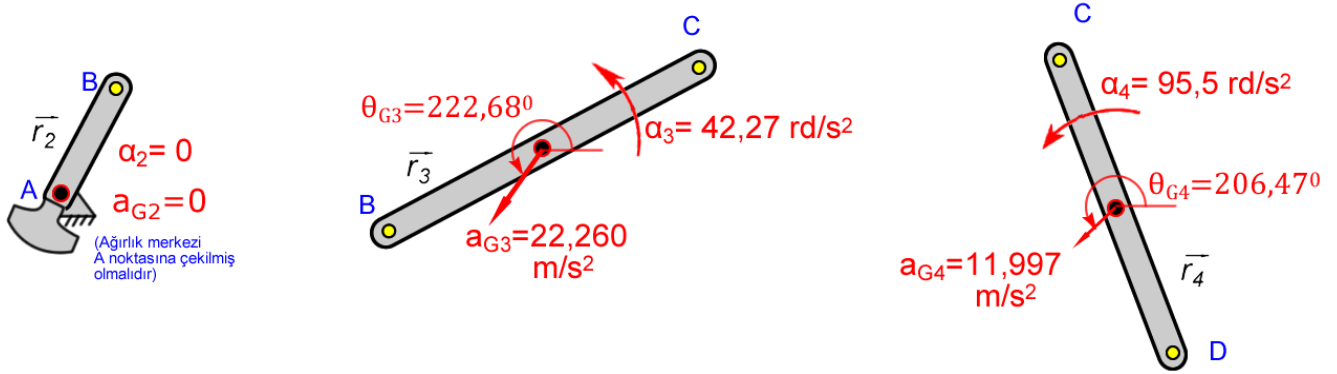
2. ders notlarında vektör matematiğini incelerken hem kuvvetlerin ($\vec{F}$) hemde momentlerin ($\vec{M}$) vektör olduğunu söylemiştik. Vektör ise içerisinde iki bilgiyi barındırır. Kuvvetin şiddeti ve yönüdür. Atalet kuvvetleri ve atalet momentleri birer vektör ise o zaman bunları oluşturan ivmelerin de vektör olması gerekir. Bu kuvvetler yönlerini ivmelerden alır. Çünkü atalet kuvveti ve atalet momenti formüllerine baktığımızda kütle (m) ve kütle atalet momenti (I_m) skaler büyüklüklerdir. Kütle ve Kütle Atalet Momentinin bir yönünden bahsedilemez. Daha önceki derslerde kuvvetle ivmelerin aynı yönlü olduğunu söylemiştik. Örneğin: Bir araba gaza basıyorsa ileri doğru kuvvet üretir ivmesi de ileri doğrudur. Bir araba frene basıyorsa araba ileri gitse bile fren kuvveti geriye doğrudur. Dolayısı yavaşlamayı gösteren ivme de geriye doğrudur. Demekki kuvvetlerde ivmelerde birer vektördür. Hem şiddeti hem yön bilgisi vardır. (Momentte bir kuvvettir. Döndürme etkisi oluşturan büyüklüktür)

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}_G \qquad \vec{M} = I_m \cdot \vec{\alpha}$$

Peki o zaman $\vec{a}$ doğrusal ivmesinin ve $\vec{\alpha}$ (alfa) açısal ivmesinin büyüklüğü ve yönü nedir? Açısal ivmelerin büyüklüğü sayısal değeridir yönü ise sağa yada sola dönüş bilgisidir. Artı (+) işaretli değerler saatin tersi yönünü (sola dönüş ↺), eksi (-) işaretler ise saatin yönünü (sağa dönüş ↻) ifade eder. Bu dönüşlerde çubuğun hangi nokta üzerinde döndüğünün bir önemi yoktur. Örneğin 4. uzuv CD çubuğu için söylersek C noktası mafsalı etrafında yada D noktası mesnet noktası etrafında dönüyor olmasına bakılmaz. Önemli olan saatin yönünde mi yada saatin tersi yönünde mi dönüyor ona bakılır. (mafsal: iki uzvun kendi aralarındaki bağlantıyı ifade eder, mesnet: herhangi bir uzvun şaseye bağlandığı noktayı ifade eder. 4 Çubuk mekanizmasında 1 nolu uzuv şasedir. Hareket etmez sabittir. Diğer uzuvlar onun üzerinde döner.)

Ağırlık merkezindeki ivmelerde ($\vec{a}_G$) vektör olduğuna göre bu ivmelerin analizde kullanabilmemiz için iki bilgiye ihtiyaç vardır. Bu ivmelerin hem şiddeti hemde yönü bilinmelidir. Yön bilgisi sağa bakan x ekseninden itibaren açı olarak ölçülür ve tüm hesaplamalar buna göre kendiliğinden ortaya çıkar.

Sonuç olarak önceki ders notlarında hesapladığımız ($\vec{a}_G$) ve ($\vec{\alpha}$) ivme vektörlerinin şiddet ve yönleri şu şekildedir. Doğrusal ivmeleri m/s^2 olarak yazmak daha uygundur (mm/s^2 değil). Çünkü bu birim kg ile çarpıldığında N birimini verecektir. ($N = kg \cdot m/s^2$)



Atalet Kuvveti ve Momenti Oluşturan İvmelerin Vektörel Tablosu					
Vektör	Şiddet/Yön	$\vec{r}_1$	$\vec{r}_2$	$\vec{r}_3$	$\vec{r}_4$
$\vec{a}_G$	$\mathbf{a}_G$ (şiddet)	0	0	$a_{G3} = 22,260$ m/s^2	$a_{G4} = 11,997$ m/s^2
	θ_G (yön)			$\theta_{G3} = 222,68^\circ$	$\theta_{G4} = 206,47^\circ$
$\vec{\alpha}$	α (şiddet)	0	0	$\ddot{\theta}_3 = \alpha_3 =$ 42.27 rd/s^2	$\ddot{\theta}_4 = \alpha_4 =$ 95.5 rd/s^2
	$\pm$ (yön)			$\curvearrowright (+)$	$\curvearrowright (+)$

B) İvmelerin oluşturduğu Atalet Kuvvet ve Momentlerinin Hesaplanması

2 nolu çubuğun üzerinde atalet etkisi oluşturan ivmeler sıfır ($a_{G2} = 0$, $\alpha_2 = 0$) olduğu için bu uzuvla ilgili herhangi bir dinamik hesaplama yapmamıza gerek yoktur.

3 ve 4 nolu çubuklar üzerine atalet etkisi oluşturan ivmeler bulunduğu için bu çubuklarda oluşan atalet kuvvetlerini sırayla hesaplayacağız. Hesaplamaya 4 nolu çubuktan başlayacağız ve C noktasındaki mafsallardaki kuvveti bulup bunu 3 nolu çubuğa aktaracağız. Onun da üzerindeki etkileri hesaplayıp B noktasında mafsallardaki kuvvetini bulacağız. B noktasındaki kuvveti 2 nolu çubuğa aktararak gerekli motor torkunu hesaplayacağız.

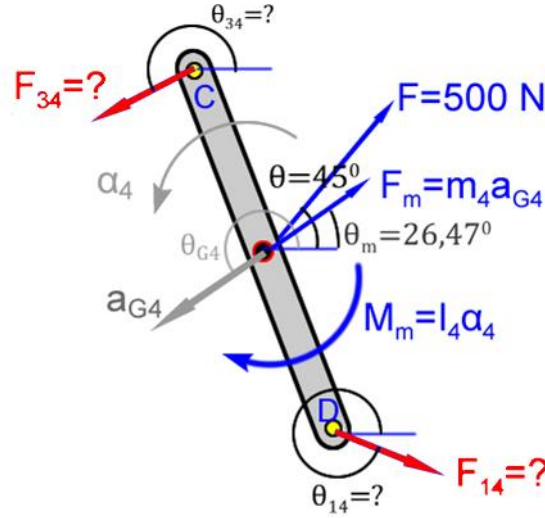
a) 4 nolu Çubuk üzerindeki Atalet ve Mafsallardaki Kuvvetlerinin Bulunması

4 nolu çubuğun üzerinde şu kuvvetler bulunmaktadır.

- F_{34} kuvvet C noktasındaki mafsallardaki kuvveti. Bu kuvvetin hem şiddetini hem açısını bilmiyoruz.
- $F = 500$ ve $\theta = 45^\circ$ kuvveti problemde verilen dış kuvettir.
- $F_m = m_4 a_{G4}$ kuvveti a_{G4} ivmesinin ortaya çıkardığı atalet kuvvetidir. $m_4 = 3$ kg alırsak bu kuvvet $F_m = m_4 a_{G4} = 3 \text{ kg} \cdot 11.997 \text{ m/s}^2 = 35,99 \text{ N}$ olur.
- $M_m = I_{m4} \cdot \alpha_4$ momenti α_4 açısal ivmenin ortaya çıkardığı momenttir. Değerini biliyoruz. Bunun için 4 nolu çubuğun kütle atalet momentinin (I_{m4}) verilmiş olması yada hesaplanmış olması gerekir. 2 nolu ders notları için kütle atalet momentlerinin hem formülle hemde Solidworks ile nasıl hesaplanacağı anlatılmıştı. Şimdilik burada 4 nolu çubuğun kütle atalet momentini $I_4 = 0.5 \text{ kgm}^2$ alalım (solidworks ile kıyaslayabilmek için burayı gerçek değer almalıyız). Buna göre oluşturacağı atalet momentini $M_m = I_{m4} \cdot \alpha_4 = 0,5 \text{ kgm}^2 \cdot 95,5 \text{ rd/s}^2 = 47,75 \text{ Nm}$ olur. (Birim analizi yaparken kg yerine Ns^2/m konulur ve radyan da 1 alınır. $(\text{Ns}^2/\text{m})(\text{m}^2) \cdot (\text{rd/s}^2) = \text{Nm}$)

(**Not:** $F=ma$ formülünde birimler $N=kg.m/s^2$ şeklindedir. Buradan kg çekilirse $kg=Ns^2/m$ olur)

- D mesnet noktasındaki (şaseye bağlı nokta) F_{14} kuvvetinin hem şiddetini hem de yönünü bilmiyoruz.

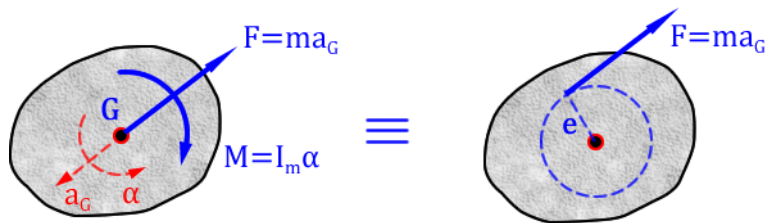


Bu 5 tane kuvvetin (1 tanesi moment) statikte olduğu gibi (2.notlar) vektörel kuvvetlerin dengesi şeklinde çözebilmek için atalet momentinden (M_m) kurtulmamız gerekir. Statikte kapalı döngü oluşturan vektörel kuvvet poligonunun etkisi sıfırdır yani bileşke kuvvet sıfırdır. Dolayısı ile bu 5 kuvvetin içinde bulunan momentten kurtulup onu da doğrusal kuvvete dönüştürmemiz gerekecek. Bunu yapabilmek için de **Atalet Dairesi** kavramını bilmemiz gerekiyor. Şimdi ara bir not olarak onu açıklayalım.

----- 000-----

Atalet Dairesi Kavramı

Bir cismin ağırlık merkezinden geçen doğrusal ivme (a_G) ters yönde atalet kuvveti oluşturuyordu ($F_m=ma_G$). Benzer şekilde cisim üzerinde oluşan açısal ivme (α) yine zıt yönde atalet momenti üretir ($M_m=I_m.\alpha$). Cismin üzerindeki bu atalet momentinden kurtulmak için, ağırlık merkezinden geçen atalet kuvvetini "e" kadar kenara çektiğimizde atalet momentinin etkisi, atalet kuvvetinin içine almış oluruz ve böylece atalet momentini cisim üzerinden kaldırabiliriz. Atalet kuvveti e yarıçapı ile çarptığımızda yine aynı moment etkisini verecektir. Buradaki e yarıçaplı daireye **Atalet Dairesi** denir (*e harfi eksantriklik "eccentricity" anlamında kullanıldığından tercih ediliyor*). Böylece cisim üzerinde oluşan kuvvetlerin etkisinde bir değişme olmaz ama atalet momenti cisim üzerinden kalkmış olur. Yani iki kuvveti tek bir kuvvet ile göstermiş oluruz

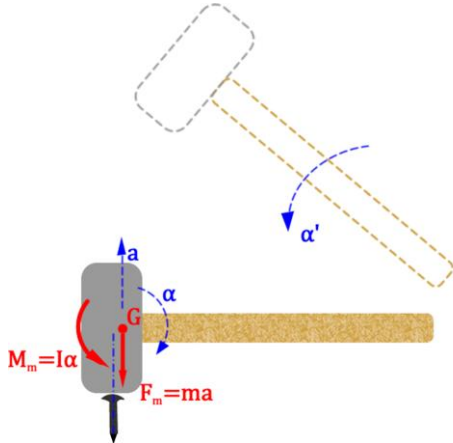


Atalet dairesinin hesabı bu durumda şu şekilde olacaktır.

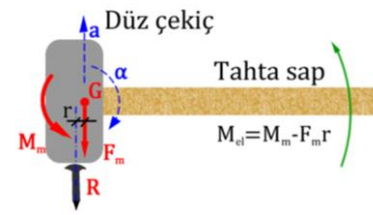
$$ma_G \cdot e = I_m \alpha$$

$$e = \frac{I_m \alpha}{ma_G}$$

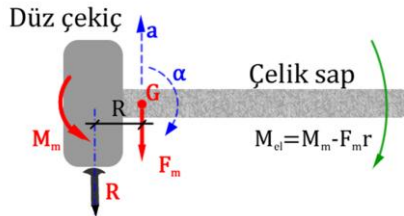
Atalet dairesinin günlük yaşamda birçok uygulamada karşılığını görebiliriz. Örneğin aşağıdaki a ve b şıklarındaki çekiçle bir murç (kalın çivi diyebiliriz) kullanarak beton kırmaya çalıştığımızda her ikisinde de vurma noktası ile ağırlık merkezi arasındaki mesafe uygun ayarlanmadığı için atalet momenti oluşacaktır ve kolumuza bu moment sürekli olarak döndürme etkisi olarak yansıyacaktır. Bu şekilde bir çekici uzun süre kullanmak rahatsız edici ve sağlık açısından sakıncalıdır. Onun yerine d deki gibi atalet dairesine göre ayarlanmış çekiçte bu moment oluşmaz ve atalet kuvvetini de murç karşıladığı için elimize herhangi bir etki yansımaz. Ustalar bu şekilde sağlıklı bir çekici ellerinde aldıklarında bunu hissederler ve o çekici kullanmak istemezler.



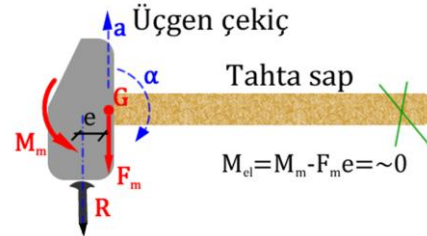
a) Çekiç çiviye vurduğu anda yavaşlama nedeniyle harekete ters yönde a ve α ivmeleri oluşur. Bunlar F_m ve M_m atalet kuvvetini ve momentini oluşturur.



b) Tahta saplı düz çekiç kullanıldığında ağırlık merkezi çivi eksenine yakın olduğundan r mesafesinin oluşturacağı $(F_m r)$ sağ momenti, M_m atalet momentinden daha küçük olacaktır. Bu durumda M_m atalet momentinin etkisi sıfırlanamadığı için elimizi havaya kaldırmaya zorlar ve rahatsız eder.

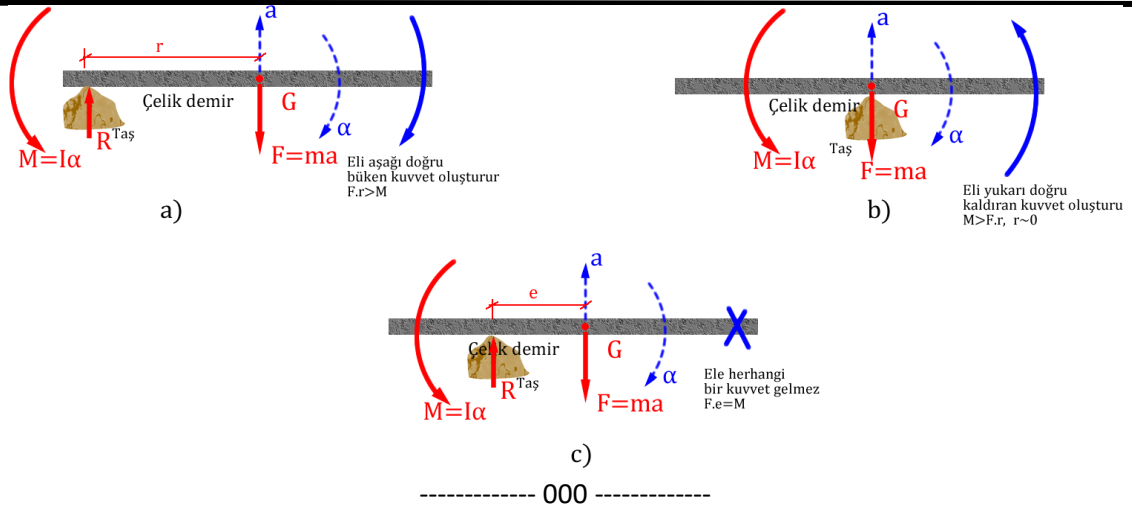


c) Çelik saplı düz çekiç kullandığımızda ise ağırlık merkezi çivi ekseninden uzakta olacaktır ve bu durumda R yarıçapının oluşturacağı $(F_m R)$ sağ moment, sola doğru olan M_m atalet momentinden büyük olacaktır ve elimiz aşağı doğru çekme etkisine maruz kalacaktır. Bu da rahatsız eder.

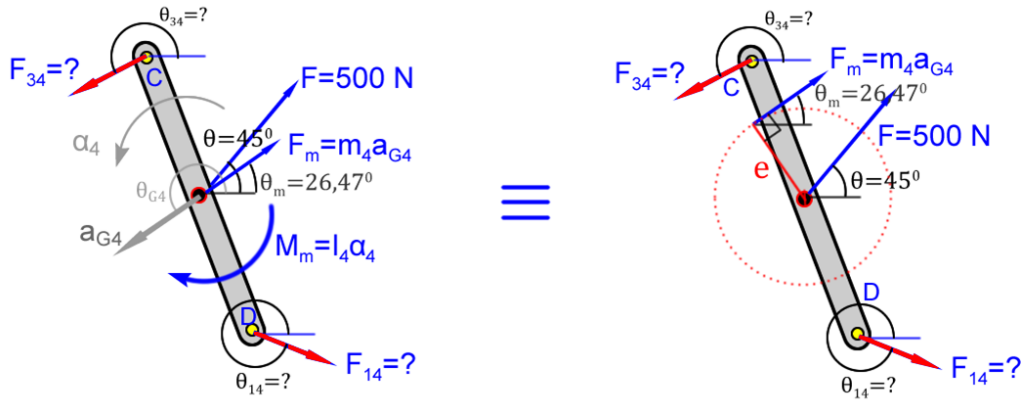


d) Çekicin tasarımı öyle ayarlanmalıdır ki, F_m atalet kuvvetinin oluşturacağı e yarıçaplı moment ile M_m atalet Momenti eşit olmalıdır. Böylece elimize hiçbir döndürme etkisi gelmeden çalışabilmeliyiz. İşte e yarıçapı bu çekicin atalet dairesinin yarıçapıdır. Çekicin tasarımı buna göre yapılmalıdır. Genellikle çekiçlerin üst kısmı alınmış olur ama bu aynı zamanda sivri ucla çalışmak için de gereklidir.

Benzer olarak aşağıdaki gibi bir çelik sopa ile bir taş vurduğumuzda da bu etkiyi hissedebiliriz. Öyle bir noktadan vurmamız ki ele hiçbir momentin gelmemesi gerekir. Beyzbol sopalarının şeklide buna göre tasarlanmıştır. Bu sopalarla topa vurduğumuzda insan kolunda döndürme etkisi oluşturmamalıdır. Dengeli bir sopada ağırlık merkezi ile vurma noktası arasındaki kalan mesafe e (atalet dairesini) gösterir.



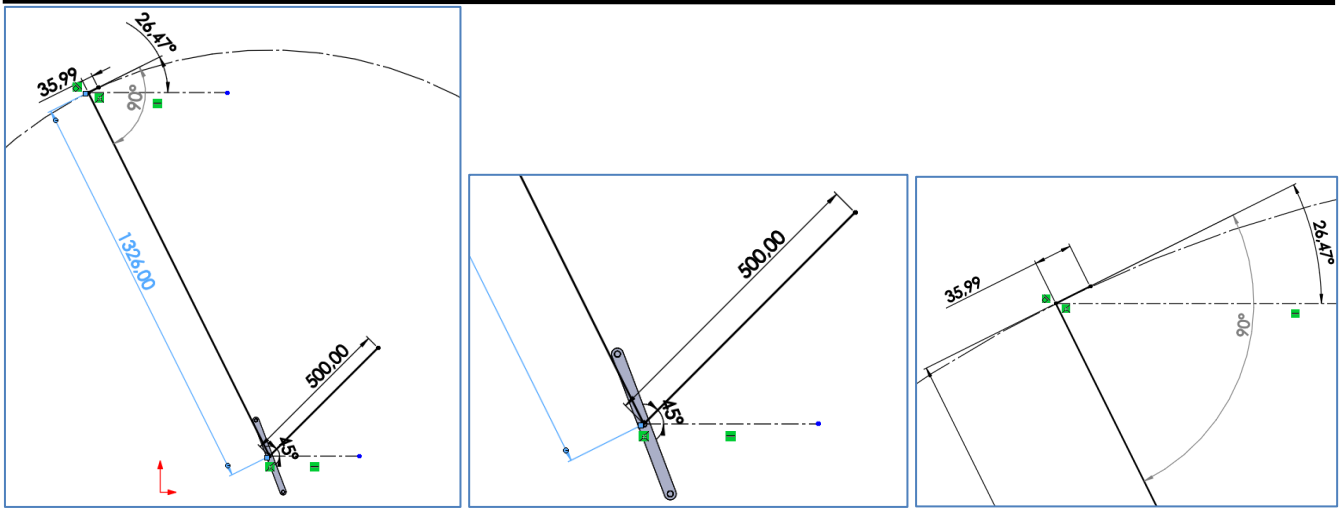
Kaldığımız yerden devam edersek, 4 nolu çubuk üzerindeki Atalet momentinden kurtulmak için atalet kuvvetini e kadar atalet dairesine teğet olacak şekilde dışarı çekersek ortaya çıkan yeni durumda bu kuvvet atalet momentinin yaptığı işi de yapacaktır.



Buna göre atalet dairesini hesaplayalım. Kütle ve ivme değerlerini yukarıda vermiştik. Buna göre e değeri;

$$e = \frac{I_m \alpha}{m a_G} = \frac{0,5 \text{ kgm}^2 \cdot 95,5 \text{ rd/s}^2}{3 \text{ kg} \cdot 11.997 \text{ m/s}^2} = 1.326 \text{ m} = 1326 \text{ mm}$$

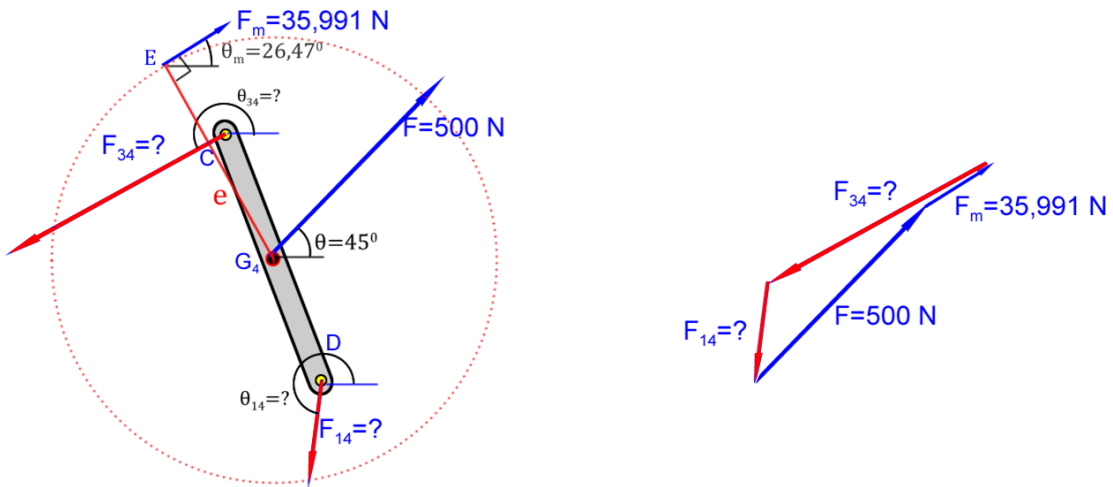
4 nolu çubuğun boyu 250 mm idi. Bu durumda atalet dairesi çubuğun boyundan çok fazla büyük ve uzak bir noktadan etki ediyormuş olarak gözükür. Mesafeleri ve bilinen kuvvetlerin büyüklüklerini Solidwork'de ölçekli çizersek şu şekilde olacaktır. $F = m a_G = 3 \text{ kg} \cdot 11.997 \text{ m/s}^2 = 35,991 \text{ N}$ Kuvvet ölçeği 1/1 olarak gösterilmiştir.



Çubuk üzerindeki kuvvetleri ölçeksiz olarak aşağıdaki gibi gösterelim. Bundan sonra artık çubuk üzerindeki tüm kuvvetlerin statik te yaptığımız gibi vektörel poligonunu oluşturabiliriz. Sistem dinamik olsa bile tüm kuvvetlerin etkisi sıfır olarak gösterilir. Dinamik etkiler tıpkı bir dış kuvvet gibi sisteme katıldığından artık statik olarak çözüme gidebiliriz.

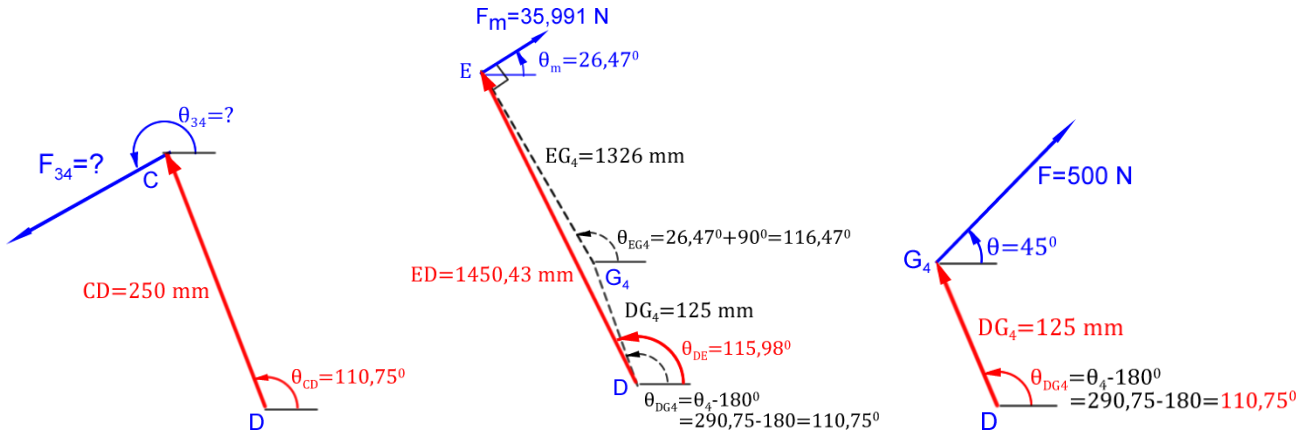
*Bu işleme **D’alembert prensibi** denir. Bir sisteme etki eden dış kuvvetler ile oluşan dinamik iç kuvvetlerin toplamı sıfır olur. Bu enerjinin korunumu kanunu gereği bu şekilde olması gerekir. Dolayısı ile statikteki problemler için geçerli olan bileşke sıfır kuvvet ilkesi dinamik problemlere de uygulanabilir. Buna göre hareket halindeki bir mekanizmada atalet kuvvetleri için içine katılırsa üzerindeki tüm kuvvetlerin toplamı sıfır kabul edilir. Bu durumda statik te nasıl çözüyorsak dinamikte de aynı şekilde çözebiliriz. Tek fark dinamikte atalet kuvvetlerini de katmalıyız.*

Çubuk üzerindeki tüm bilinen kuvvetleri ve bilinmeyen kuvvetleri yaklaşık gösterelim. Buna göre vektörel kuvvet poligonunu oluşturalım. Fakat burada C ve D noktalarındaki mafsal kuvvetlerinin yönü ve şiddeti bilinmiyor. Dolayısı ile 4 bilinmeyen (her vektör içinde iki bilinmeyen barındır, boy ve açı) vektörel poligonla bulamayız. Eğer burada bilinmeyen bir vektör olsaydı onun boyu ve açısını bulabilirdik.



Vektörel poligonu incelediğimizde iki tane bilinmeyen vektör olduğunu görüyoruz. Bu durumda bu poligondan sonuca gidemeyiz. Fakat D noktasına göre moment alırsak F_{14} kuvvetinden kurtuluruz ve elimizde F_{34} kuvveti kalır.

D noktasına göre Moment Dengesini ($\Sigma M=0$) yazarken Vektörel denklemleri kullanarak çözelim. Vektörel olarak momentleri yazarken önce mesafe vektörünü yazmalıyız. Mesafe vektörü ile kuvvet vektörünün Vektörel Çarpımı bir moment vektörünü verecektir. Bu konu 2 notlarda anlatılmıştı. Her bir kuvvet ve mesafe vektörlerini gösterelim.



Burada verilen üç momentin vektörel çarpımlarının toplamı sıfır olmalıdır. Bu işlemi denklem olarak yazalım. Moment denklemleri oluşturulurken önce mesafe vektörü daha sonra kuvvet vektörü yazılır. Momentin yönünü birim vektörlerin ortaya çıkardığı k birim vektörü belirler.

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 = 0$$

$$\overrightarrow{DG_4} \times \vec{F} + \overrightarrow{DE} \times \vec{F}_m + \overrightarrow{DC} \times \vec{F}_{34} = 0$$

$$DG_4 \cdot \overrightarrow{\mu(\theta_{DG4})} \times F \cdot \overrightarrow{\mu(\theta)} + DE \cdot \overrightarrow{\mu(\theta_{DE})} \times F_m \cdot \overrightarrow{\mu(\theta_m)} + DC \cdot \overrightarrow{\mu(\theta_{DC})} \times F_{34} \cdot \overrightarrow{\mu(\theta_{34})} = 0$$

2. notların içinde geçen Vektörel çarpımların özellikleri içindeki bulunan $\boxed{a\vec{A} \times a\vec{B} = a \cdot b(\vec{A} \times \vec{B})}$ özelliği kullanılarak birim vektörleri vektörel çarpım olarak parantez içine alalım.

$$DG_4 \cdot F \left(\overrightarrow{\mu(\theta_{DG4})} \times \overrightarrow{\mu(\theta)} \right) + DE \cdot F_m \left(\overrightarrow{\mu(\theta_{DE})} \times \overrightarrow{\mu(\theta_m)} \right) + DC \cdot F_{34} \left(\overrightarrow{\mu(\theta_{DC})} \times \overrightarrow{\mu(\theta_{34})} \right) = 0$$

2. notların içinde verilen vektörel çarpım formüllerini kullanarak parantez içindeki ifadelerin karşılıklarını yazalım. $\boxed{\overrightarrow{\mu(\theta_n)} \times \overrightarrow{\mu(\theta_k)} = \sin(\theta_k - \theta_n)\vec{k}}$ (Dışlar aynı, içler farklı). (**Dikkat:** Sin() lü ifadede açığı yazarken önce ikinci vektörün açısı yazılır. θ_k ifadesi önce yazılmalıdır. Değişme özelliği yoktur!)

$$DG_4 \cdot F \cdot \sin(\theta - \theta_{DG4})\vec{k} + DE \cdot F_m \cdot \sin(\theta_m - \theta_{DE})\vec{k} + DC \cdot F_{34} \cdot \sin(\theta_{34} - \theta_{DC})\vec{k} = 0$$

Yine 2. Notlarda verilen şu formüle göre k vektörlerini parantez dışına alalım. $\boxed{a\vec{A} + b\vec{A} = (a + b)\vec{A}}$

$$[DG_4 \cdot F \cdot \sin(\theta - \theta_{DG4}) + DE \cdot F_m \cdot \sin(\theta_m - \theta_{DE}) + DC \cdot F_{34} \cdot \sin(\theta_{34} - \theta_{DC})]\vec{k} = 0$$

$\vec{k}$ vektörü hiçbir zaman sıfır olamaz. Boyu her zaman 1 dir ve açısı sıfır bile olsa oda bir açıdır. Bu nedenle denklemde mecburen parantez içi sıfır olmak zorundadır. Matematikte $a \cdot b = 0$ ise ve $b \neq 0$ ise $a = 0$ olmak zorundadır. Bu durumda denklem şu hale dönüşür.

$$DG_4 \cdot F \cdot \sin(\theta - \theta_{DG4}) + DE \cdot F_m \cdot \sin(\theta_m - \theta_{DE}) + DC \cdot F_{34} \cdot \sin(\theta_{34} - \theta_{DC}) = 0$$

Değerleri yerine yazalım.

$$125\text{mm} \cdot 500\text{ N} \cdot \sin(45^\circ - 110,75^\circ) + 1453,45\text{mm} \cdot 35,991\text{ N} \cdot \sin(26,47^\circ - 115,98^\circ) + 250\text{mm} \cdot F_{34} \cdot \sin(\theta_{34} - 110,75^\circ) = 0$$

Sadeleştirelim.

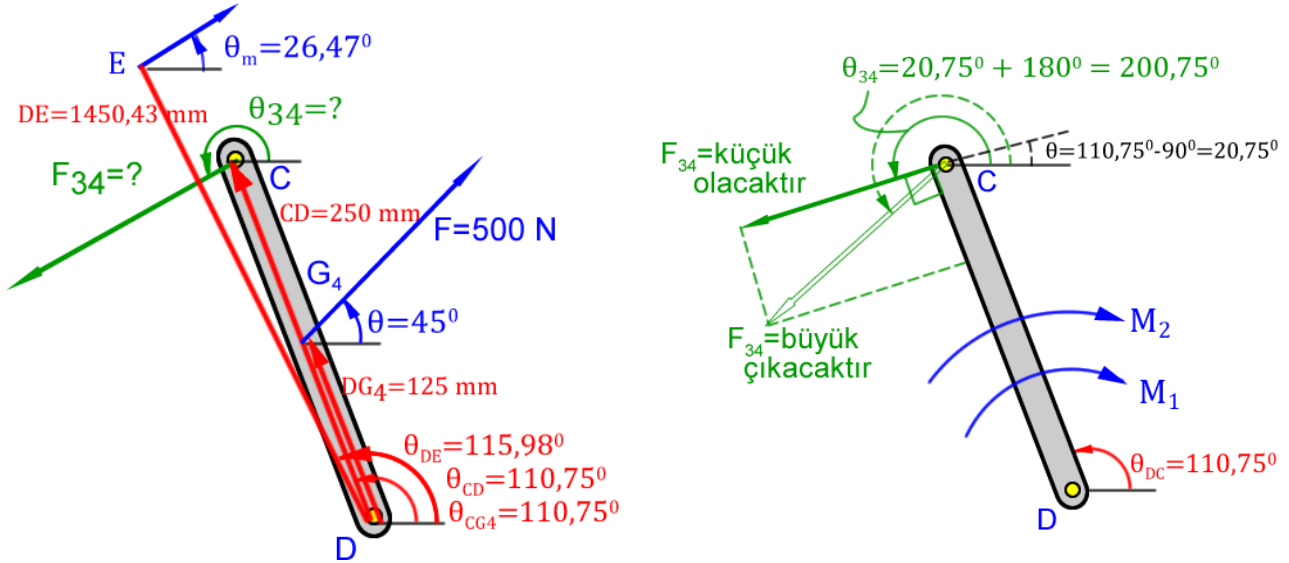
$$-56985,127\text{ Nmm} - 52309,2\text{ Nmm} + 250\text{mm} \cdot F_{34} \cdot \sin(\theta_{34} - 110,75^\circ) = 0$$

Gördüğümüz gibi denklemden iki tane bilinmeyen var ve elimizde ise tek bir denklem var. Dolayısı ile buradan çözüme devam etmemiz zordur.

-----000-----

Fakat şöyle bir mantık yürütelim. Bağlantı (mafsal) noktalarındaki kuvvetlerin hangi yöne baktığı ve büyüklüğünün ne olduğu bizi çok fazla ilgilendirmesin. Çünkü bu kuvvetler bir uzuvdan diğerine aktarılır. Yani bu kuvvetler içte birbirlerini sönmlediği için motorda oluşan torku etkilememektedir. Motoru zorlayan uzuvlara dışarıdan etki eden kuvvetler ile atalet kuvvetleridir.

Olayı bir de şu şekilde inceleyelim. Aşağıdaki resimde 4 nolu uzuv üzerinde verilen kuvvetlerden mavi olanlar bildiğimiz kuvvetlerdir. Yeşil renkle verilen ise bizim bulmak istediğimiz kuvvettir (kırmızılar mesafeyi gösteriyor). Bu yeşil kuvvetin hem açısını hem büyüklüğünü bilmiyoruz. M_1 ve M_2 momentlerini dengelemek için aradığımız F_{34} kuvvetinin açısını ne alırsak denge için bu kuvvetin büyüklüğü değişecektir. Dolayısı ile denklemi çözebilmek için θ_{34} açısını 4 nolu uzva dik olacak şekilde alalım ($\theta_{34} = 200,75^\circ$). Herhangi bir yönde de alabilirdik. Moment dengesine göre F_{34} kuvvetin büyüklüğü ona göre çıkacaktır.



Kaldığımız yerden devam edelim. Elimizde aşağıdaki denklem bulunmaktadır. $\theta_{34} = 200,75^\circ$ açısını bu değer almaya karar verdik. Artık tek bir bilinmeyen ($F_{34} = ?$) olduğu için bunu bulabiliriz.

$$-56985,127\text{ Nmm} - 52309,2\text{ Nmm} + 250\text{mm} \cdot F_{34} \cdot \sin(\theta_{34} - 110,75^\circ) = 0$$

$$-56985,127\text{ Nmm} - 52309,2\text{ Nmm} + 250\text{mm} \cdot F_{34} \cdot \sin(200,75^\circ - 110,75^\circ) = 0$$

$$F_{34} = \frac{56985,127\text{ Nmm} + 52309,2\text{ Nmm}}{250\text{mm} \cdot \sin(200,75^\circ - 110,75^\circ)}$$

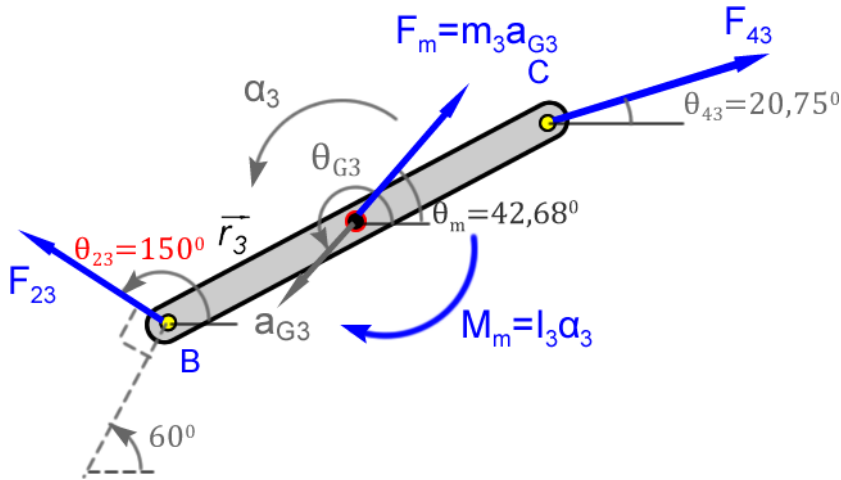
$$F_{34} = 437.177\text{ N}$$

Açısını rastgele aldık. Eğer açısını farklı alsaydık denge kuvveti ona göre değişecekti. Örneğin $\theta_{34} = 225^\circ$ derece alırsak bu durumda $F_{34} = 479 \text{ N}$ çıkar. O yüzden mafsal noktalarında alınacak olan kuvvetler iç denge kuvvetleri olduğundan yani dış kuvvetlerin etkisini değiştirmeden diğer uzva aktaracağından burada açıları kendimiz alabiliriz.

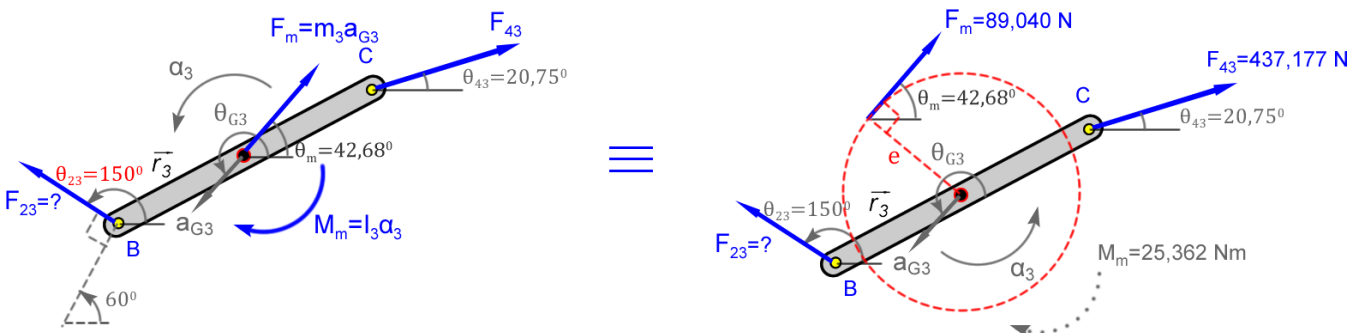
b) 3 nolu Çubuk üzerindeki Atalet ve Mafsal Kuvvetlerinin Bulunması

3 nolu çubuğun üzerinde şu kuvvetler bulunmaktadır.

- F_{43} kuvvet C noktasındaki mafsal kuvvetidir. Bu kuvvet 4 nolu çubuktan gelmektedir. Yönü tam olarak zıttı olacaktır. Buna göre değerleri $F_{43}=437,177 \text{ N}$ ve $\theta_{43}=20,75^\circ$ olur.
- $F_m=m_3a_{G3}$ kuvveti a_{G3} ivmesinin ortaya çıkardığı atalet kuvvetidir. $m_4=4 \text{ kg}$ alırsak bu kuvvet $F_m=m_4a_{G4}=4 \text{ kg} \cdot 22.260 \text{ m/s}^2 \Rightarrow F_m= 89,040 \text{ N}$ olur. Açısı $\theta_m=42,68^\circ$ olur.
- $M_m=I_3 \cdot \alpha_3$ momenti α_3 açısal ivmenin ortaya çıkardığı momenttir. Değerini biliyoruz. Bunun için 4 nolu çubuğun kütle atalet momentinin verilmiş olması yada hesaplanmış olması gerekir. 2 nolu ders notları için kütle atalet momentlerinin hem formülle hemde Solidworks ile nasıl hesaplanacağı anlatılmıştı. Şimdilik burada 3 nolu çubuğun kütle atalet momentini $I_3=0.6 \text{ kgm}^2$ alalım. Buna göre oluşturacağı atalet momenti $M_m=I_3 \cdot \alpha_3 = 0,6 \text{ kgm}^2 \cdot 42,27 \text{ rd/s}^2 \Rightarrow M_m=25,362 \text{ Nm}$ olur.
(Birim analizi yaparken kg yerine Ns^2/m konulur ve radyan da 1 alınır. $(\text{Ns}^2/\text{m})(\text{m}^2) \cdot (\text{rd/s}^2) = \text{Nm}$)
- B mafsal noktasındaki F_{23} kuvvetin yönünü biz tahmini olarak alalım. Şiddetini ise buna hesapla bulacağız. Diğer türlü 2 bilinmeyen olduğunda denklem çözülüyordu. Bunu yukarıda ispatladık. Açığı ne alırsak ona göre kuvvetin dengeyi sağlayacak büyüklükte çıkacaktır. Mafsal kuvvetleri direk diğer uzva taşıdığından motor torkunu etkilemeyecektir.



3 nolu çubuk üzerindeki Atalet momentinden kurtulmak için atalet kuvvetini e kadar atalet dairesine teğet olacak şekilde yana çekersek ortaya çıkan yeni durumda bu kuvvet atalet momentinin yaptığı işi de yapacaktır.



Buna göre atalet dairesini hesaplayalım. Kütle ve ivme değerlerini yukarıda vermiştik. Buna göre e değeri;

$$e = \frac{I_m \alpha}{m a_G} = \frac{0,6 \text{ kgm}^2 \cdot 42,27 \text{ rd/s}^2}{4 \text{ kg} \cdot 22.260 \text{ m/s}^2} = \frac{25,362 \text{ Nm}}{89,040 \text{ N}} = 0.284 \text{ m} = 284 \text{ mm}$$

e mesafesi şekilde gösterilenden daha büyüktür. Solidworks'de gerçek ölçülerinde çizilirse daha net olarak görülür.

Atalet dairesini kullanarak Atalet momentinden kurtulmuş olduk. Böylece cisim üzerinde 3 tane kuvvet bulunmaktadır. Statikte yaptığımız gibi bu kuvvetlerin bileşkesi sıfır olmak zorundadır (Cismin hareketi nedeniyle oluşan atalet etkileri kuvvete dönüştürüldüğü için artık statikte gibi çözebiliyoruz. Buna D'alembert prensibi denilir. Elimizde tek denklem olduğundan θ_{23} açısını kendimiz tahmini olarak alıyoruz. Ona göre denge gereği F_{23} kuvvetinin büyüklüğü çıkmış olmaktadır.

$$\Sigma \vec{F} = 0, \quad \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$$

$$F_{43} \cdot \overrightarrow{\mu(\theta_{43})} + F_m \cdot \overrightarrow{\mu(\theta_m)} + F_{23} \cdot \overrightarrow{\mu(\theta_{23})} = 0$$

Bu denklemde sadece F_{23} kuvveti bilinmiyor. Birim vektörlerden kurtulmak için denklemin tamamını öyle bir bir vektörle çarpalım ki, hem birim vektörler kalsın hem de ifade 1 değerine eşit olsun. 0 olursa F_{23} de gider. O yüzden burayı 1 yapmaya çalışacağız. $\overrightarrow{\mu(\theta_{23})}$ ifadesini 1 yapmak için 2. notlarda verilen şu formüle göre $\overrightarrow{\mu(\theta_n)} \cdot \overrightarrow{\mu(\theta_n)} = 1$ (Dışlar aynı, içler aynı) yine kendisi ile çarpmalıyız. Buna göre eşitlik bozulmasın diye tüm denklemi bu ifade ile çarpalım.

$$\overrightarrow{\mu(\theta_{23})} \cdot [F_{43} \cdot \overrightarrow{\mu(\theta_{43})} + F_m \cdot \overrightarrow{\mu(\theta_m)} + F_{23} \cdot \overrightarrow{\mu(\theta_{23})}] = 0$$

$$F_{43} \cdot \overrightarrow{\mu(\theta_{43})} \cdot \overrightarrow{\mu(\theta_{23})} + F_m \cdot \overrightarrow{\mu(\theta_m)} \cdot \overrightarrow{\mu(\theta_{23})} + F_{23} \cdot \overrightarrow{\mu(\theta_{23})} \cdot \overrightarrow{\mu(\theta_{23})} = 0$$

2. notlarda verilen birim vektörlerin skaler çarpım formüllerde “dışlar aynı, içler farklı” ifadeler $\cos()$ olarak çıkar.

$$\underbrace{F_{43} \cdot \overrightarrow{\mu(\theta_{43})} \cdot \overrightarrow{\mu(\theta_{23})}}_{\cos(\theta_{43} - \theta_{23})} + \underbrace{F_m \cdot \overrightarrow{\mu(\theta_m)} \cdot \overrightarrow{\mu(\theta_{23})}}_{\cos(\theta_m - \theta_{23})} + \underbrace{F_{23} \cdot \overrightarrow{\mu(\theta_{23})} \cdot \overrightarrow{\mu(\theta_{23})}}_1 = 0$$

$$F_{43} \cdot \cos(\theta_{43} - \theta_{23}) + F_m \cdot \cos(\theta_m - \theta_{23}) + F_{23} \cdot 1 = 0$$

Vektörlerden kurtuldu. F_{23} çekersek sonuç şu şekilde olur.

$$F_{23} = -F_{43} \cdot \cos(\theta_{43} - \theta_{23}) - F_m \cdot \cos(\theta_m - \theta_{23})$$

$$F_{23} = -437,177 \text{ N} \cdot \cos(20,75^\circ - 150^\circ) - 89,040 \text{ N} \cdot \cos(42,68^\circ - 150^\circ)$$

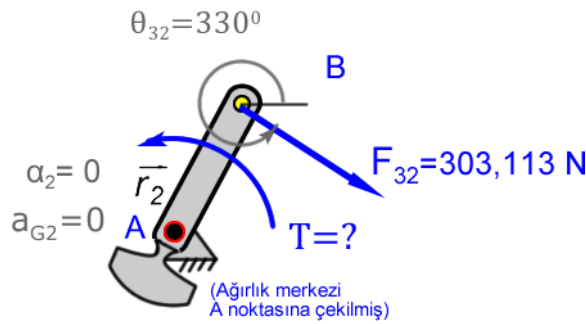
$$F_{23} = 303,112 \text{ N}$$

Sonuç negatif çıksaydı tahmini alınan okun yönü ters olacaktı (yani tahmini alınan açı daha küçük olacaktı). Bu tür işlemleri tüm açılar için programladığımızdan alınan açıların ve yönleri ile ilgilenmeyiz. Tüm açılar kendi içinde birinden diğerine aktarılırken artı/eksi durumlarını kendi içinde ayarlayacaktır. Elle çözülürken yinede tahmini olarak doğru almakta fayda var. Konu daha kolay anlaşılır.

a) 2 nolu Çubuk üzerindeki Atalet ve Mafsal Kuvvetlerinin Bulunması

2 nolu çubuğun üzerinde şu kuvvetler bulunmaktadır.

- F_{32} kuvveti B noktasındaki mafsal kuvvetidir. Bu kuvvet 3 nolu çubuktan gelmektedir. Yönü tam olarak zıttı olacaktır. Buna göre değerleri $F_{32}=303,113 \text{ N}$ ve $\theta_{32}=330^\circ$ olur.
- 2 nolu çubuk dengelenmiş olduğundan yani ağırlık merkezi A mesnet noktası üzerinde olduğundan ağırlık merkezi hareket etmez ve bu nedenle doğrusal ivmesi sıfırdır. İvme olmayınca $F_m=m_2a_{G2}$ kuvveti de sıfır olur. $F_m=0 \text{ N}$ olur.
- 2 nolu çubuk sabit açısal hızla döndüğünden α_2 açısal ivmesi de sıfırdır. Bu nedenle oluşacak olan $M_m=I_2.\alpha_2$ atalet momenti de sıfır olur. $M_m=0 \text{ Nm}$ olur. Böylece motora bağlı uzuvların dengelenmesinin önemi ortaya çıkmış oluyor.
- 2 nolu çubuk üzerinde tek bilinmeyen motorun etki ettiği $T=?$ Torkudur. Bu torku bulmak için yine vektörel moment denge denklemini kullanarak çözelim.



$$\Sigma \vec{M} = 0, \quad \vec{T} + (\vec{AB} \times \vec{F}_{32}) = 0$$

Denklemleri çözebilmek için birim vektörler cinsinden yazmalıyız. $\vec{T}$ vektörü sola doğru döndüğünden birim vektörü $\vec{k}$ vektörü ile gösterilir (Bkz: 2. Notlar). $\vec{AB}$ mesafe vektörü ile $\vec{F}_{32}$ kuvvet vektörünün açıları bilindiğinden bunların birim vektörlerini $\vec{\mu}$ olarak ifade ederiz.

$$T.\vec{k} + (AB.\vec{\mu}(\theta_2) \times F_{32}.\vec{\mu}(\theta_{32})) = 0$$

2. notlarda verilen $\boxed{a\vec{A} \times a\vec{B} = a.b(\vec{A} \times \vec{B})}$ formülünü uygularsak.

$$T.\vec{k} + AB.F_{32}.(\vec{\mu}(\theta_2) \times \vec{\mu}(\theta_{32})) = 0$$

$\boxed{\vec{\mu}(\theta_n) \times \vec{\mu}(\theta_k) = \sin(\theta_k - \theta_n)\vec{k}}$ (Dışlar aynı, içler farklı) formülünü uygularsak, önce ikinci ifadenin açısı yazılır.

$$T.\vec{k} + AB.F_{32}.\sin(\theta_{32} - \theta_2)\vec{k} = 0$$

$\boxed{a\vec{A} + b\vec{A} = (a + b)\vec{A}}$ formülünü uygularsak.

$$[T + AB.F_{32}.\sin(\theta_{32} - \theta_2)]\vec{k} = 0$$

Bu ifade $\vec{k}$ vektörü sıfır olamayacağına göre (daha önce açıklamıştık) parantezin içi sıfır olacaktır. Buradan da tek bilinmeyen T torkunu buluruz. Sonuç pozitif çıkarsa şekilde gösterdiğimiz yön doğru demektir. Negatif çıkarsa yönü ters demektir.

$$T + AB \cdot F_{32} \cdot \sin(\theta_{32} - \theta_2) = 0$$

$$T + 150\text{mm} \cdot 303,112\text{N} \cdot \sin(330^\circ - 60^\circ) = 0$$

$$T - 45466 \text{ Nm} = 0$$

$$T = 45,466 \text{ Nm}$$

Torku ve açısal hızı biliyorsak fotoğrafın çekildiği esnada motoru zorlayan gücü bulmuş oluruz. $\omega_2 = 15 \text{ rd/s}$ idi.

$$P = T \cdot \omega_2$$

$$P = 45,466 \text{ Nm} \cdot 15 \text{ rd/s}$$

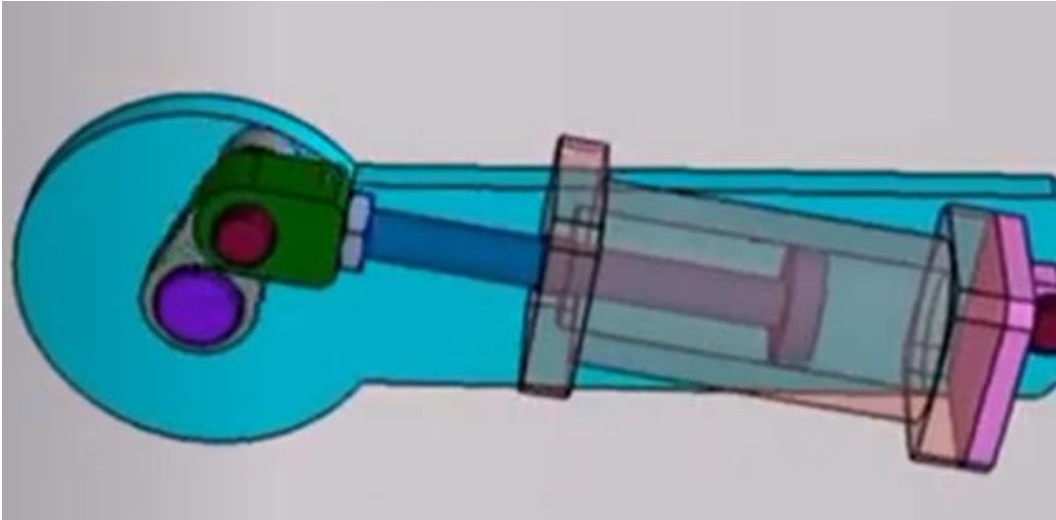
$$P = 681,99 \frac{\text{Nm}}{\text{s}} = 682 \text{ Watt} = 0,682 \text{ kW}$$

I_m kütle atalat momentlerini ve m kütle değerlerini rastgele aldık. Bu değerleri solidworks'tan çizim üzerinden hesaplayıp almış olsaydık bu sonuçlar tam olarak gerçek hayatı yansıtmış olurdu. Böylece bulduğumuz sonucu Solidworks de hesaplanan motor gücü ile karşılaştırabilirdik.

ÖDEVLER

Ödev 1:

Dersin sayfasında verilen (100 Mekanizma-28dk) şu videonun 1.19 saniyesindeki krank biyel mekanizmasına benzer bir mekanizmayı kullanarak suyu belli bir yüksekliğe belli bir debi ile basan Pompa yapmak istiyoruz. (<https://www.youtube.com/watch?v=hJleSY7ckq8>). Buna göre şu hesapları yapın. Herkesin seçtiği pompa kriterleri birbirinden farklı olacak. Tasarımlarınız biraz gerçekçi olsun. Motora bağlı krankı dengeleyin.



- Hesapları fotoğrafı çektiğiniz ve motoru en fazla **zorlayacak konum** için hesaplayın. Bu resimde verilen konumda motor sağa doğru saatin yönünde dönerse içindeki suyu en yüksek zorlanma ile basmaya çalışacaktır. Buna yakın bir konumu seçebilirsiniz.

- b) Öncelikle pompanın **üreteceği basıncı** belirleyin. Bunun için seçeceğiniz aralık 3 Bar ile 10 Bar arasında olsun. 1 Bar (=100.000 Pascal) basınç suyu yaklaşık 10 metre yüksekliğe basar (kayıpsız)
- Diyelim 5 Bar seçtiniz. Çizdiğiniz Pompanın piston çapına göre bu basınç pistonun ekseninde belli bir kuvvet oluşturur ($P=F/A$). Bu kuvvette motoru zorlayacaktır ve motora **Tork olarak** yansıyacaktır. Ayrıca motora bu etkinin yanında ivmeler nedeniyle atalet etkileri de etki edecektir. (Zaten bu ders bu hesapları yapmak içindir). Bütün bunlar motora Tork olarak yansıyacaktır.
- c) Ayrıca Pompanın basacağı **suyun debisini** belirleyin. Bunun için saniyede 3 litre ile 10 litre basacak şekilde pompanın devrini belirleyin. Bu hesabı şu şekilde yapabilirsiniz. Diyelim yaklaşık olarak pompayı çizdiniz. Krank her tur attığında piston bir strok gidip gelecektir. Suyu bastığı hacim silindirin içinde zaten bellidir. Çiziminize göre pistonunu süpürdüğü hacimi bulun. Krank her döndüğünde bu strok hacmi kadar suyu basacak demektir. Örneğin bu strok hacmi 1 litre olsun. Sizde saniyede pompanın 7 litre basmasını istiyorsanız buna göre kran saniyede 7 tur dönmesi gerekir. Yani buradan krankın dönmesi gereken **açısal hızını** bulmuş olacaksınız.
- d) Çiziminizi yapıp, kriterlerinizi yaptıktan sonra ders notlarında verilen 3 haftadan 8 haftaya kadar anlatılan tüm konuları bu mekanizmaya uygulayarak motor gücünü bulun (Not: 4 notlardaki Statik Analiz yapılmayacak). Yaptığınız her hesabı, Solidworks ile de doğrulayın. Yani vektörel poligonu çizin, fotoğrafın çekildiği konum için konum tablosunu hesaplayın, hız denklemini oluşturun bunu çözerek Hız tablosunu bulun. İvme denklemini oluşturun, bunu kullanarak ivme tablosunu doldurun. Ardından mafsalları noktaların ivmelerini ve ağırlık merkezlerinin ivmelerini bulun. Ağırlık merkezlerinin ivmelerinden sonra artık atalet kuvvet ve momentlerini hesaplayıp bunu motora kadar taşıyın ve verilen konum için motora gelen Torku hesaplayın. Bunu belirlediğiniz açısal hız ile çarparak gerekli **motor gücünü** bulun. **Mekanik kayıpları** da hesaba katarak bulduğunuz motor gücünü **%20** artırın. Artık çarşıdan satın alınacak motor bu güçte olacak demektir.