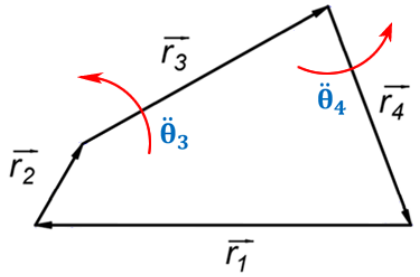
MAKİNE DİNAMİĞİ (7. Hafta)

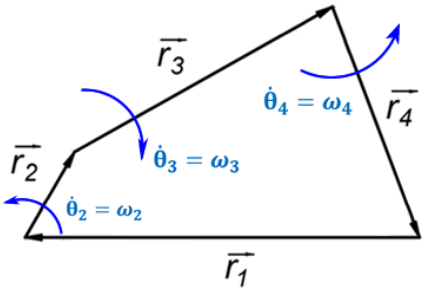
MEKANİK SİSTEMLERİN İVME ANALİZİ-2

Önceki derste 4 çubuk mekanizmasının İvme analizini yapmıştık. İvme analizi dediğimizde Vektörel poliğonla gösterilen mekanizmanın üzerindeki tüm vektörlerin boy ve açılarının ivmelerinin bulunması anlayacağız. Bu sonuçlar aşağıdaki gibi çıkmıştı.



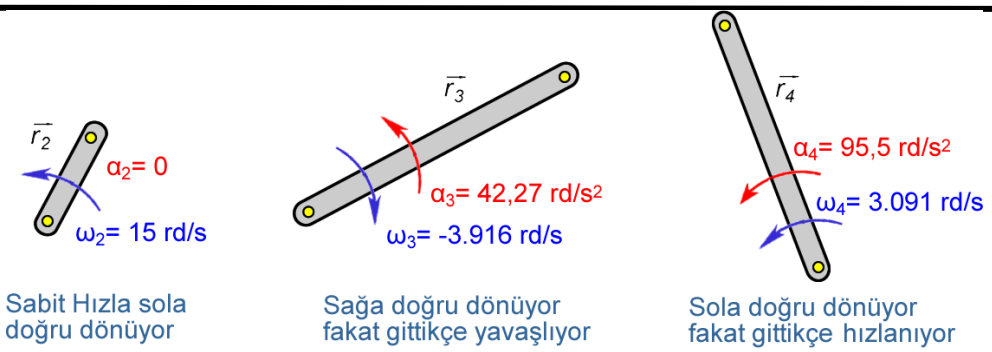
İvme Tablosu				
	$\vec{r_1}$	$\vec{r_2}$	$\vec{r_3}$	$\vec{r_4}$
$\ddot{r}$ (doğrusal ivme, mm/s²)	0	0	0	0
$\ddot{\theta}$ (açısal ivme, rd/s²)	0	0	$\ddot{\theta}_3 = \alpha_3 = 42{,}27\ \mathrm{rd/s^2}$	$\ddot{\theta}_4 = \alpha_4 = 95{,}5\ \mathrm{rd/s^2}$

Bu hesaplamalarda bizim esas hedefimiz atalet kuvveti ve atalet momenti üreten ivmelerin bulunmasıdır. Burada bulduğumuz açısal ivmeler atalet momentinin hesaplanması için kullanılacak fakat atalet kuvvetlerini hesaplayabilmek için ağırlık merkezlerinin doğrusal ivmelerine ihtiyaç vardır. Ağırlık merkezlerinin ivmelerini bulmak içinde çubukların uçlarındaki mafsal noktalarının ivmelerini bulmamız gerekiyor. Dolayısı ile ivme ile ilgili iki aşama daha işlem yapmamız gerekecek. Bunlar; a) Mafsal Noktalarının ivmesinin bulunması, b) Ağırlık merkezlerinin ivmesinin bulunması. Çubukların uç noktalarının ivmelerini bulmak için açısal hız ve açısal ivmelere ihtiyaç vardır. Yukarıdaki tabloda açısal ivmeleri verdik. Açısal hızlara da ihtiyaç olacağından daha önceden bulduğumuz hız tablosunuda burada gösterelim.

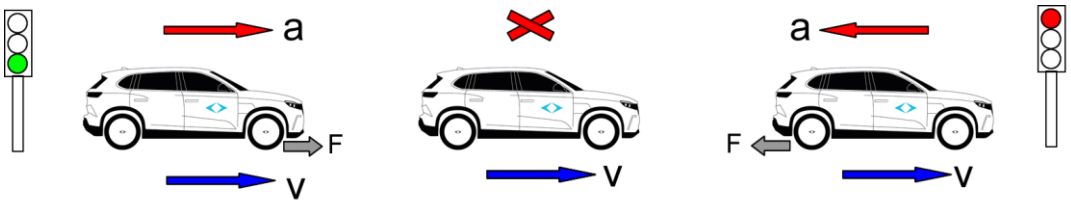


Hız Tablosu				
	$\vec{r_1}$	$\vec{r_2}$	$\vec{r_3}$	$\vec{r_4}$
$\dot{r}$	0	0	0	0
$\dot{\theta}$	0	$\dot{\theta}_2 = \omega_2 = 15$ rd/s	$\dot{\theta}_3 = \omega_3 = -3.916\ rd/s$	$\dot{\theta}_4 = \omega_4 = 3.091\ rd/s$

Dikkat: Hız vektörlerine bakarak hareketin yönünü görebiliriz. Fakat ivmelere bakarak döndüğü yönü göremeyiz. Örneğin aşağıdaki resimde mavi oklarla gösterilen hızlar üzerinde bulunduğu uzvun direk ne tarafa döndüğünü gösterir. Fakat üzerindeki ivmeler döndüğü yönü göstermez. Bu ivmeler ancak hız vektörleri ile birlikte bakılırsa bir anlam ifade eder. Eğer hız vektörü ile ivme vektörü aynı yöne bakıyorsa o yöne doğru bir hızlanma var demektir (4 nolu çubuğun hareketi). Eğer hız vektörü ile ivme vektörü zıt yöne bakıyorsa hızın baktığı yönde bir yavaşlama var demektir (3 nolu çubuğun hareketi). 2 nolu çubukta ivme olmadığı için hızın baktığı yönde sabit hızla dönme söz konusudur.



Aynı durumları doğrusal harekettede görelim. Aşağıda 1. Durumda araba kırmızı ışıklardan çıkmış gaza basıyor ve hızlanıyor. Dolayısı ile ileri doğru araba gidiyor, hız vektörü ileri ve ivme vektörü de ileridir. Bu arada ivme vektörü ile kuvvet vektörü ile aynı yöne bakar. 3. Durumda araba kırmızı ışıklara yaklaşıyor ve frene basıyor. Fren kuvveti geriye doğrudur ve ivmenin yönüde kuvvetle aynı yöndedir. Fakat araba bu durumda hala ileri gitmektedir, dolayısı ile hız vektörü ileridir. 2. Durum ise yolda sabit hızla gittiği bir durumu gösterecektir. İvme sıfırdır. Dolayısı ile arabanın üzerindeki kuvvetlerde sıfırdır. Yani arabayı götürmeye çalışan motor kuvveti ile rüzgar ve sürtünme kuvvetleri birbiri ile denge halindedir.



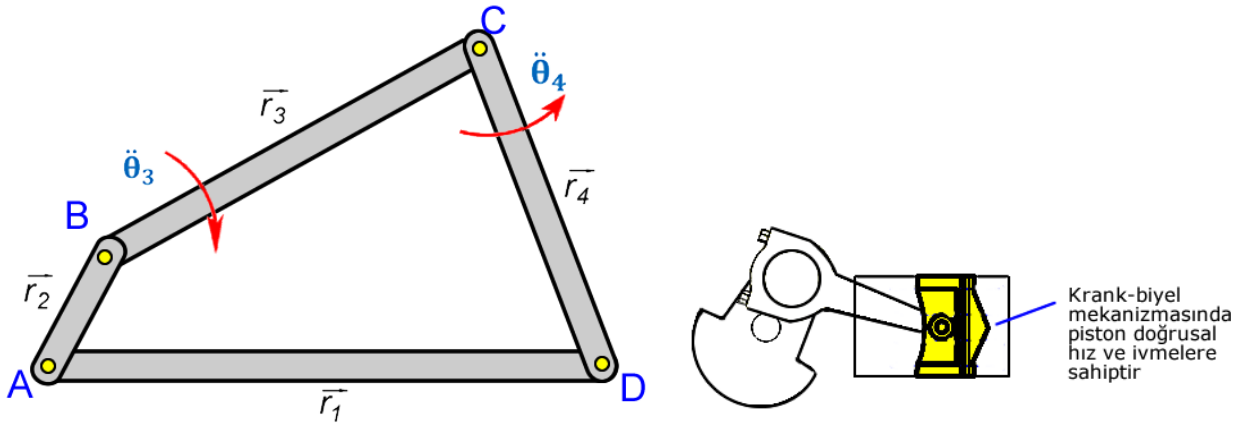
Araba ışıklardan çıkıp hızlanıyor Motor kuvveti ileriyi gösterir ve ivme de ileridir. Gittiği yön ise hız vektörünü gösterir. İvme ile hız aynı yöne baktığı için hızlanma vardır.

Yolun ortalarında sabit hızla gidiyor. Dolayısı ile ivme yoktur. İvme yoksa üzerindeki motor ve sürtünme kuvvetleri denge halindedir.

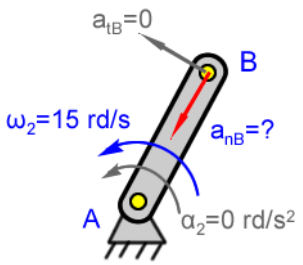
Araba kırmızı ışıklara yaklaşıyor. Frene basıyor, kuvvet vektörü geriye doğrudur. Dolaysı ile ivmede geriye doğrudur. Ama araba hala ileri gidiyor Hız vektörü ileridir. İvme vektörü ile hız vektörü zıt yönlü olduğu için yavaşlama söz konusudur.

A. Mafsal Noktalarının Doğrusal İvmesinin Bulunması

Her bir uzvun (vektörün) doğrusal ve açısal ivmeleri bulunduktan sonra mafsal noktalarının doğrusal ivmesini bulabiliriz. (Bu örnekte 4 çubuk mekanizmasındaki vektörlerin doğrusal ivmesi çıkmamıştır ama krank biyel mekanizması olsaydı pistonun hareketleri doğrusal ivme oluştururdu).



<u>B noktasının ivmesini bulalım</u>: Bu nokta 2 nolu çubuğa bağlı olduğu için bu çubuk üzerinden ivmesini bulabiliriz. 2 nolu çubuğun açısal ivmesi sıfır olduğu (α_2=0) için B noktasının teğetsel ivmesi yoktur (a_{tB}=0). Fakat sabit bir hızla bile dönse B noktasının merkezcil ivmesi vardır (a_{nB}=?). Bu ivmeyi bulduğumuzda B noktasının bileşke ivmesini de bulmuş oluruz (a_{nB}=a_B).



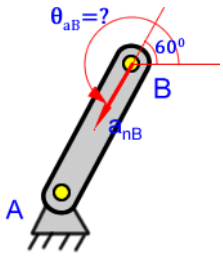
Dairesel harekette teğetsel ivme formülü 2. notlar içinde verilmişti. Şu şekildedir;

$a_{tB} = r\,\alpha_2 \Rightarrow a_{tB} = 0$ ($\alpha_2 = 0$ dır. Çubuk sabit hızla dönüyor)

$a_{nB} = r\,\omega_2^2 = 100\text{mm} \,.\, 15^2\ (\text{rd/s})^2 \Rightarrow a_{nB} = 22500\ \text{mm/s}^2$

$a_B = \sqrt{{a_{tB}}^2 + {a_{nB}}^2} = \sqrt{0^2 + 22500^2} \Rightarrow$ **a_B= 22500 mm/s²** olur.

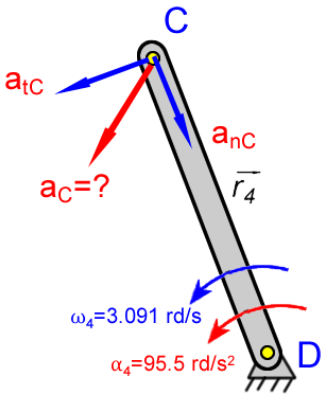
a_B ivmesinin yatayla yaptığı açıyı bulalım. (İvmeler vektör olduğu için hem boyunu hem açısını bilmemiz gerekir)



θ_{aB}= $180^0 + 60^0 =$ **240^0** olur.

<u>C noktasının ivmesini bulalım</u>: Bu nokta 4 nolu çubuğa bağlı olduğu için bu çubuk üzerinden ivmesini bulabiliriz. 4 nolu çubuğun fotografın çekildiği esnada hem belli bir açısal hızı ve açısal ivmesi vardır. Dolayısı ile C noktasının hem teğetsel ivmesi hem de normal (merkezcil) ivmesi olacaktır. Bu iki ivmenin bileşkesi C noktasının ivmesini verecektir.

4 nolu çubuk sabit D noktası üzerinde dönmektedir. Açısal ivmeleri gösterirken C noktası üzerinde göstermekle D noktası üzerinde göstermek aynı şeydir. Sonuçta her ikisinde de çubuğun sola doğru döndüğünü görmekteyiz.



Dairesel harekette merkezden uzak noktalarda teğetsel ivme merkezcil ivme oluşur. Bu ivmelerin formülleri 2. Notlarda verilmişti.

$a_{tC} = r\,\alpha_4 = 250\ \text{mm} \,.\, 95.5\ \text{rd/s}^2 = 23875\ \text{mm/s}^2$

$a_{nC} = r\,\omega_4^2 = 250\text{mm} \,.\, 3{,}091^2\ (\text{rd/s})^2 = 2388{,}57\ \text{mm/s}^2$

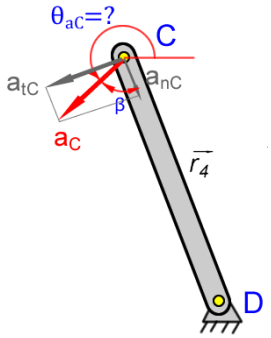
$a_C = \sqrt{{a_{tC}}^2 + {a_{nC}}^2} = \sqrt{23875^2 + 2388{,}57^2} =$.

a_C= 23994,18 mm/s² olur.

a_C ivme vektörünün yatayla yaptığı açıyı bulalım.

$$\text{Tan}\beta = a_{tC} / a_{nC} = 23875\ \text{mm}/\ 2388{,}57\ \text{mm} = 9{,}995 \Rightarrow \beta = 84{,}28^0$$

$$\boldsymbol{\theta_{aC}} = \theta_4 - \beta = 290{,}75^0 - 84{,}28^0 = \mathbf{206{,}47^0}\ \text{olur.}$$

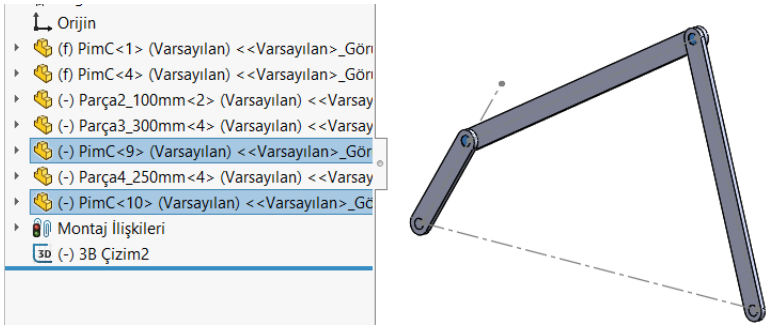


Mafsal noktalarının doğrusal ivmelerini topluca tablo şeklinde gösterecek olursak şu şekilde bir sonuç bulunmuş olur. (Not: mafsal noktalarının dairesel ivmesinden bahsedilemez. Dairesel ivme cismin her noktası için aynı değerde olan ivmedir)

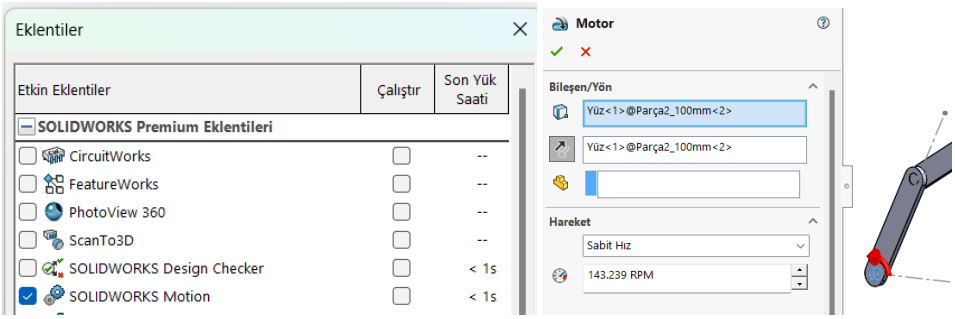
Mafsal Noktaların Doğrusal İvme Tablosu				
	A	B	C	D
a İvmenin büyüklügü	0	a_B= 22500 mm/s^2	a_C= 23994,18 mm/s^2	0
θ İvmenin yatayla yaptığı açı	0	$\theta_{aB}=240^0$	$\theta_{aC}=206,47^0$	0

Mafsal Noktalarına Ait Doğrusal İvme Sonuçlarının Solidworks ile Doğrulanması

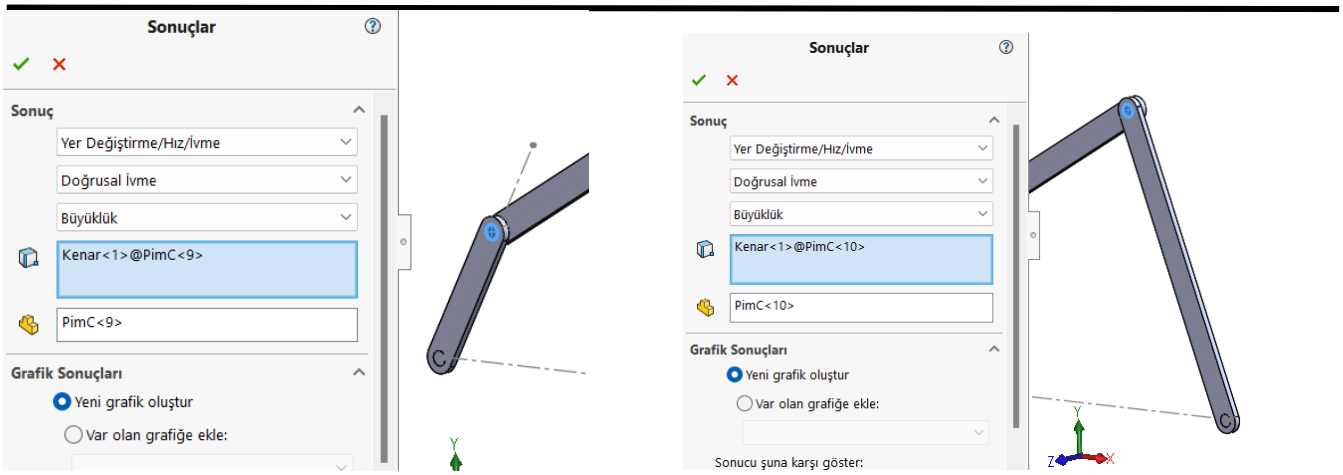
B ve C noktalarındaki doğrusal ivmeleri hesaplayabilmek için bu noktalara modelde pim yerleştirdik.



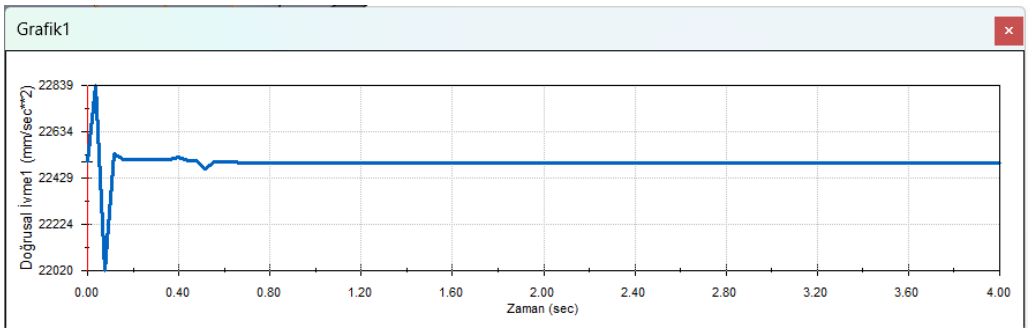
Ardından eklentiler kısmında Motion Analizi açtık.Daha önceki 5 nolu ders notlarında daha detaylı anlatıldığı şekilde şekilde 2 nolu çubuğun A noktasın Motor eklendi ve hızı 15 rd/sn olacak şekilde verildi.



B noktasındaki pim seçilip buna Sonuç grafiği eklendi. Aşağıdaki şekilde ayarları yapıldı. Buraa kenar olarak pimin dairesi seçildi. Cisim olarakda pim in kendisi seçildi. Böylece daire merkezinin doğrusal ivmesi ölçüldü. Vektör olarak bileşke ivme arandığından 3. seçenekte "Büyüklük ifadesi seçildi. Aynı işlemler C noktası içinde yapıldı.

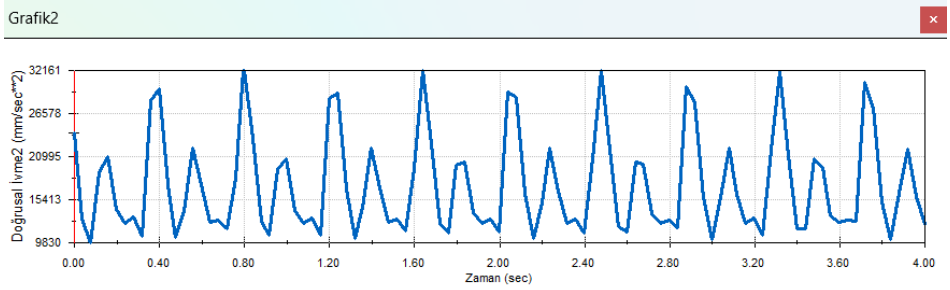


B noktasının doğrusal ivme grafiği aşağıdaki şekilde çıktı. İlk başlangıçta ivmeyi hesaplarken programın salınım yaptığı görülüyor. Oysa 2 nolu çubuk sabit hızla döndüğü için ivmede sabit bir değer olmalıydı (sadece merkezcil ivme var. Bu yüzden açısal hıza bağlı olarak sabit çıkar). Bu nedenle grafiğin ilk değerlerine bakmak yanlış olacaktır. 2. Saniye civarına baktığımızda 22495 mm/s2 olduğunu görüyoruz. Bu değer bizim yukarıda hesapladığımız **a_B=22500 mm/s²** sonucu ile yaklaşık olarak yakındır (Onbinde 2 civarında bir hata gösteriyor). Sonuç doğrudur yani.



51	1.92,22495.4604347539
52	1.96,22495.4604346262
53	2,22495.4604346055
54	2.04,22495.4604348089
55	2.08,22495.4604335954

C noktasının ivme grafiği incelendiğinde grafiğin tekrarlı aynı peryodları takip ettiğini görüyoruz. Fotografı çektiğimiz an harekete başlanan ilk an olduğundan ilk zaman dilimine bakarsak aradığımız ivmeyi buluruz. Buna göre Excel değeri 0 saniyede 23994 mm/s² ivme verdiğini görüyoruz. Bu değer bizim hesapladığımız değerle aynıdır (**a_C= 23994,18 mm/s²**). Sonuç doğrudur.

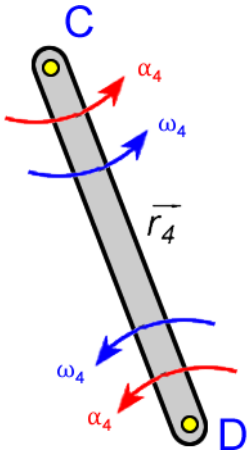


2	Zaman (sec),"Doğrusal İvme2 (mm/sec**2)"
3	0,23994.9430872818
4	0.04,12813.0661240178
5	0.08,9830.27350021027
6	0.12,18852.9310172501

B. Ağırlık Merkezlerinin Doğrusal İvmesinin Bulunması

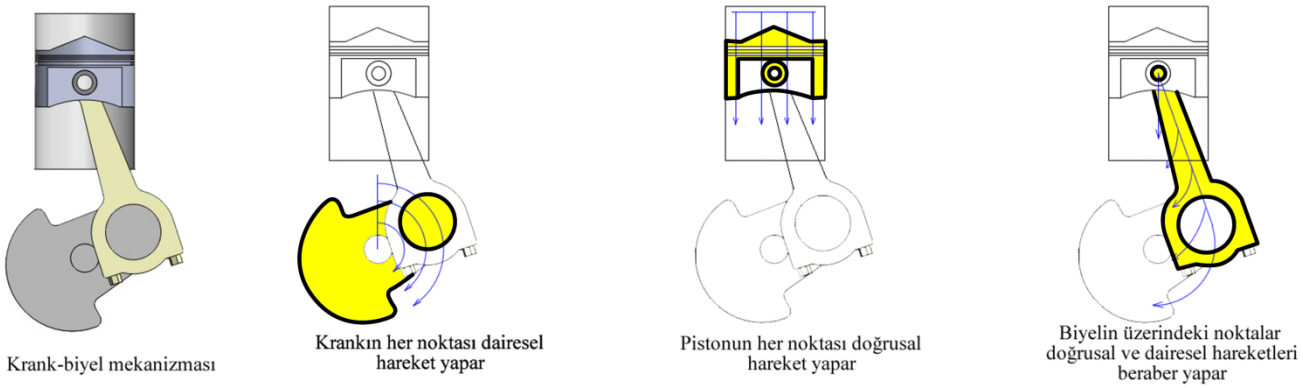
Mekanizmada bir uzvun herhangi bir noktasının dairesel ivmesinden söz edilemez. Dairesel ivme cismin tamamı için geçerlidir her noktasında aynı değerdedir. Yani cismin şu noktasının dairesel ivmesi şudur, diğer noktasının dairesel ivmesi şudur şeklinde farklı ivmelerden bahsedilemez. Tek bir değerdir ve yönü sağa yada sola bakacak şekilde ifade edilir. Aşağıdaki şekilde cisim ister C noktası üzerinde dönüyor kabul edelim, ister D noktası

üzerinde dönüyor kabul edelim dairesel ivmesi (benzer şekilde açısal hızı da) tek dir ve her ikisinde de sola dönüş vardır. Hesaplama yaparken kullanılan her iki gösterimde doğrudur.

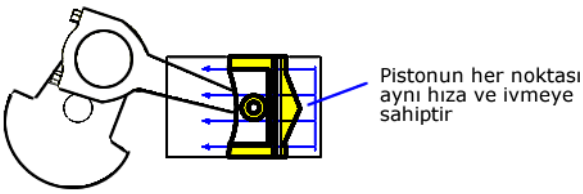


Oysa cismin üzerindeki doğrusal ivmeler, dönme hareketi esnasında her nokta için farklıdır. Dolayısı ile cismin Ağırlık merkezinin ivmesi ile cismin uç noktalarının ivmeleri tamamen farklıdır. Atalet kuvvetlerini hesaplayabilmek için Ağırlık merkezi üzerindeki ivmelere ihtiyacımız vardır. Bu ivmeleri bulmak için de önceki başlıkta bulduğumuz mafsal noktalarının ivmelerini bilmemiz gerekiyor.

Ağırlık merkezinin ivmelerini bulurken aşağıdaki gibi 3 aşamalı olarak konuyu inceleyebiliriz. Aşağıdaki krank-biyel mekanizması üzerindeki üç parça örnek olarak bu hareketleri yapmaktadır.

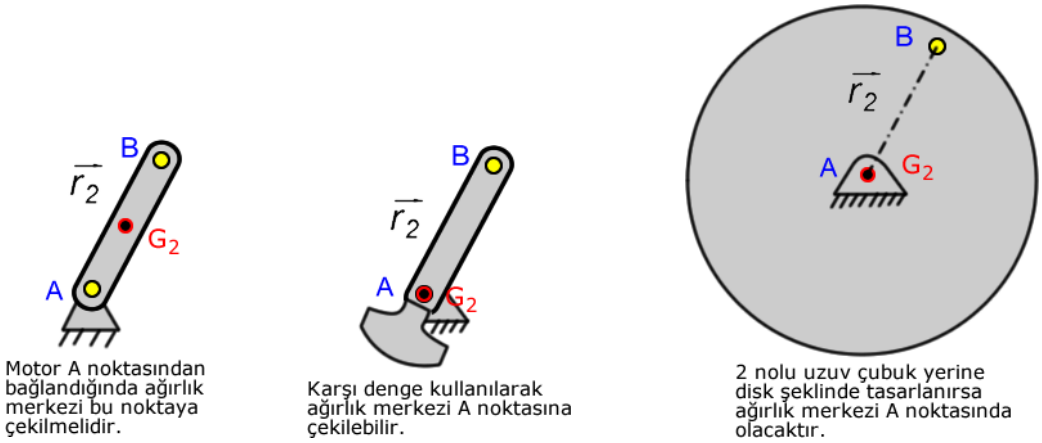


1) <u>Cisim doğrusal hareket yapıyorsa ağırlık merkezinin ivmesi</u>: Bu hareketi yapan cisim üzerindeki her nokta aynı yörüngeyi takip eder. Dolayısı ile herhangi bir noktasının ivmesini biliyorsak, ağırlık merkezinin ivmeside aynı olacaktır. 4-çubuk mekanizmasında bu hareketi yapan bir uzuv yoktur, krank-biyel mekanizmasındaki pistonun hareketi bu şekildedir.

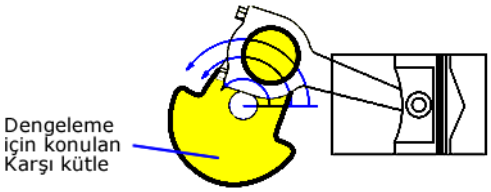


2) <u>Cisim dairesel hareket yapıyorsa ağırlık merkezinin ivmesi</u>: Dairesel hareket yapan cismin merkezden uzakta herhangi bir noktasının ivmesini biliyorsak ağırlık merkezinin ivmesi merkeze uzaklıkla orantı kurularak bulunabilir.

4-çubuk mekanizmasında 2 nolu dairsel hareket yapıyor fakat bu çubuk motora bağlı olduğundan ağırlık merkezi dönme merkezine alınmalıdır. Tasarım o şekilde yapılmalıdır. Bunu sağlamak için ya karşı denge kullanılmalı yada çubuğun şekli dairesel disk şeklinde tasarlanmalıdır. Böylece ağırlık merkezi dönme merkezine alınırsa, ağırlık merkezi hareket etmeyecektir ve ivmesi sıfır olunca oluşacak atalet kuvvetleri de sıfır olacaktır. Buna göre $\mathbf{a_{G2}=0}$ olur.



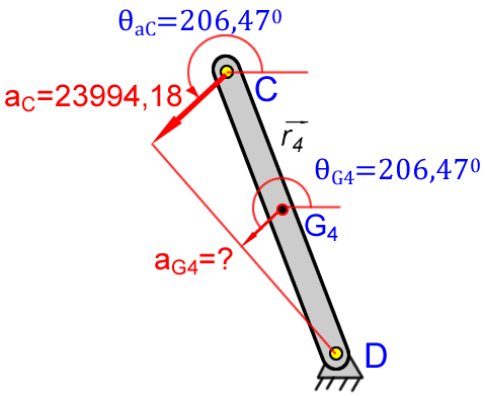
Krank-biyel mekanizmasında Krank dairesel hareket yapmaktadır. Krankın dengelenmesi karşı kütle kullanarak yapılır.



4-çubuk mekanizmasında 4. çubuk ta dönme hareketi yapmaktadır. Fakat bu çubuğun ağırlık merkezi çubuğun tam ortasındadır. Çubuğun uç noktası olan C noktasının ivmesini bulmuştuk. Buna göre ağırlık merkezinin ivmesi ve açısı benzerlik üçgeni kurularak orantı ile bulunabilir. Çubuğun boyu 250 mm idi. Ağırlık merkezide 125 mm mesafede olur.

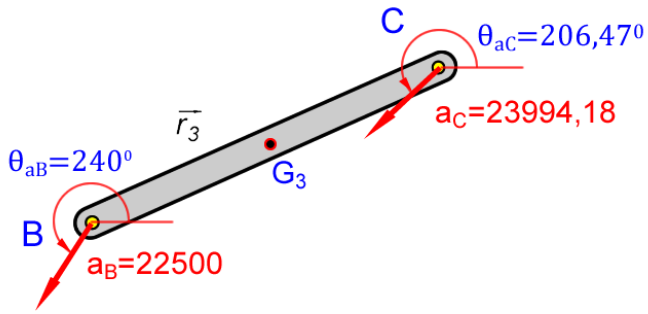
$$\frac{23994{,}18}{250} = \frac{a_{G4}}{125} \Rightarrow \mathbf{a_{G4}=11997{,}09}$$

Açısı C noktasındaki ivmesinin açısı ile aynı olur. $\mathbf{\theta_{G4}= 206{,}47^0}$

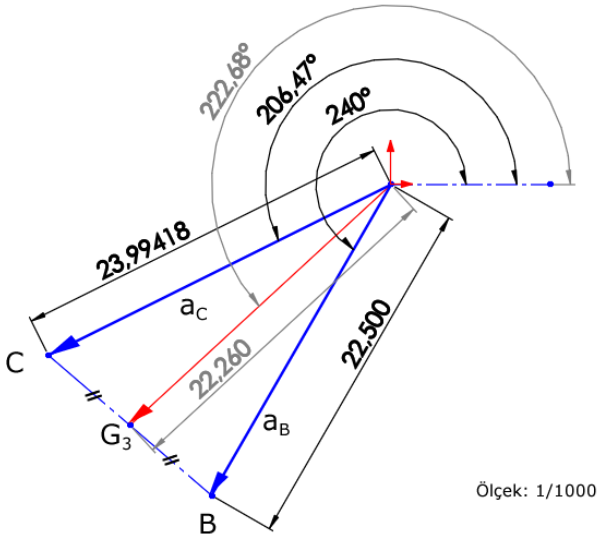


3) <u>Cisim hem doğrusal hem dairesel hareket yapıyorsa ağırlık merkezinin ivmesi</u>: Bu tip bir hareketi 4-çubuk mekanizmasında 3 nolu çubuk yapmaktadır. Krank-biyel mekanizmasında ise Biyel kolu yapmaktadır. Bu şekilde hareket eden bir cismin ağırlık merkezinin ivmelerini bulabilmek için üzerindeki en az iki noktasının ivmesini bilmek gerekir. 3 nolu çubuğun üzerindeki B ve C noktalarının ivmesini bildiğimize

göre ağırlık merkezinin ivmesini yine benzerlikten bulabiliriz. B ve C noktalarındaki ivmelerin büyüklükleri ve açıları aşağıdaki şekilde bulunmuştu.



B ve C noktalarındaki ivmeleri ve açılarını Solidworks de aşağıdaki şekilde ölçekli olarak çizelim. İvme vektörlerinin uçlarını bir çizgi ile birleştirelim. Her vektörün ucuna, bağlı olduğu çubuk üzerindeki noktanın adını yazalım (B ve C isimlendirmesini yapalım). Eğer ağırlık merkezi tam ortada ise bu B ve C noktasının ortasını işaretleyelim. Şayet ağırlık merkezi B noktasına yakın ise hangi oranda yakınsa aynı orantı ile B noktasına yaklaştıralım. Burada 3 nolu çubuğun ağırlık merkezi tam ortada olduğundan çizginin ortasını orijine bağlayan vektör ağırlık merkezinin ivmesini gösterir. Buna göre 3 nolu çubuğun ağırlık merkezinin ivmesi ve açısı, **a_{G3}=22260 mm/s²** , **θ_{G3}=222.68⁰** olur.

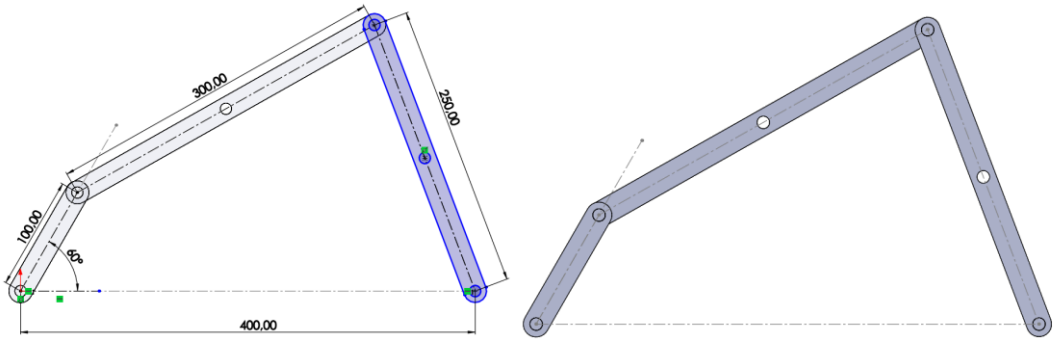


Böylece 4 çubuk mekanizmasındaki tüm uzuvların ağırlık merkezlerindei doğrusal ivmeleri bulduk. Hepsini bir tablo şeklinde gösterirsek aşağıdaki şekilde olacaktır.

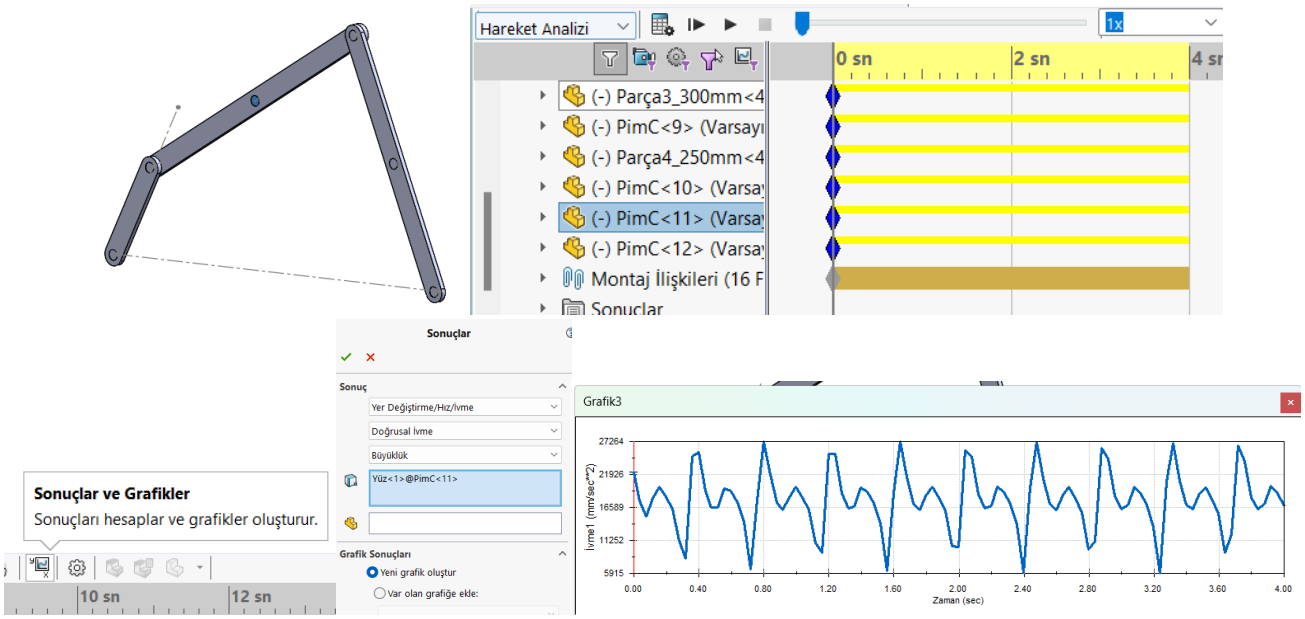
Ağırlık Merkezlerin Doğrusal İvme Tablosu				
	$\vec{r_1}$	$\vec{r_2}$	$\vec{r_3}$	$\vec{r_4}$
a_G İvmenin büyüklügü	0	0	**a_{G3}= 22260 mm/s²**	**a_{G4}= 11997,09 mm/s²**
θ_G İvmenin yatayla yaptığı açı	0	0	**θ_{G3}=222,68⁰**	**θ_{G4}=206,47⁰**

Ağırlık Merkezlerinin İvme Sonuçlarının Solidworks ile Doğrulanması

Yukarıda bulduğumuz ağırlık merkezlerinin ivmelerini daha önceden Solidworks da çizdiğimiz mekanizma üzerinde deneyerek doğrulamasını yapalım. Ağırlık merkezlerinin yerlerini Solidworks da ölçebilmek için bu kısımlara küçük bir pim koyalım. Pimin ivmesi çubukların ağırlık merkezinin ivmesini gösterecektir.



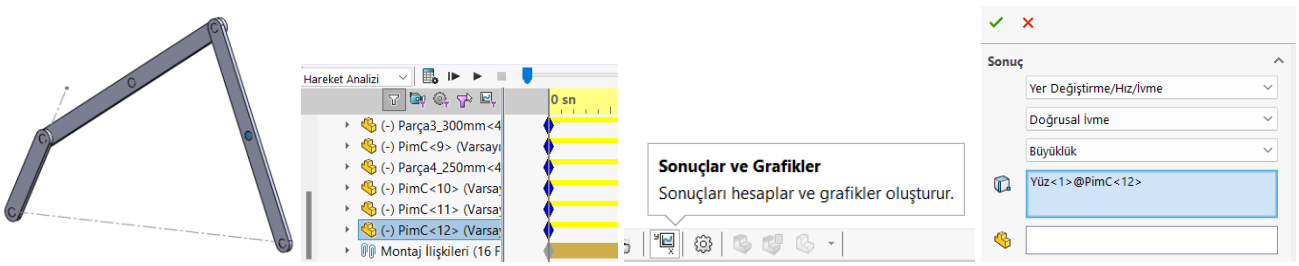
3 nolu çubuğun ağırlık merkezinin ivmesi

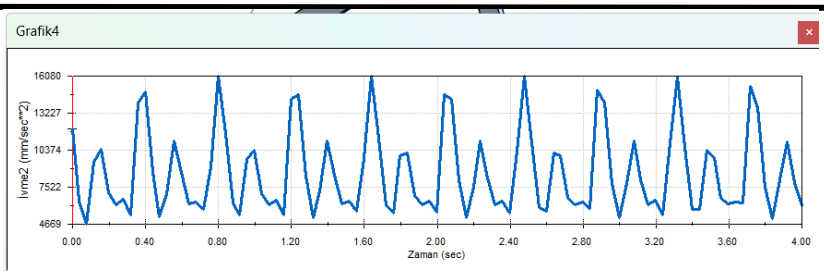


Hareketin 0. Saniyesini hesapladığımızdan grafiği Excel'de açtığımızda (grafiğin alt kenarına sağ tuşa tıklayıp CSV yi seçin) 0 saniyedeki ivmenin **22260 mm/s²** olduğunu görüyoruz. Bu sonuç bizim bulduğumuz sonuçla aynıdır.

	A	B	C
1	Grafik3		
2	Zaman (sec),"İvme1 (mm/sec**2)"		
3	0,22260.0843690766		
4	0.04,17613.8409600415		
5	0.08,15054.361295119		

Benzer şekilde 4 nolu çubuğunda ivmesine bakalım.





Exceli açtığımızda 0. Saniyedeki ivmenin **11997,47 mm/s²** olduğunu görüyoruz. Buda bizim bulduğumuz 11997,09 değeri ile aynıdır.

	A	B	C
1	Grafik4		
2	Zaman (sec),"İvme2 (mm/sec**2)"		
3	0,11997.4715436409		
4	0.04,6442.02472678032		
5	0.08,4668.62318124493		

Not: 3 ve 4 nolu çubukların açısal ivmeleri de vardır. Bu ivmelerin Solidworks ile doğrulamalarını bir önceki derste yapmıştık.

SONUÇ

Atalet ve Kuvvet momentlerini oluşturan ve bunları hesaplamamız sağlayacak İvme değerlerimizi şu şekilde bulmuş olduk. Bir sonraki derste bunları kullanarak atalet kuvvet ve momentlerini hesaplayacağız.

Atalet Kuvveti ve Momenti Oluşturan İvmelerin Vektörel Tablosu					
Vektör	Şiddet/Yön	$\vec{r_1}$	$\vec{r_2}$	$\vec{r_3}$	$\vec{r_4}$
$\vec{a}_G$	a_G (şiddet)	0	0	a_{G3}= **22,260** m/s²	a_{G4}= **11,997** m/s²
	θ_G (yön)			θ_{G3}=**222,68⁰**	θ_{G4}=**206,47⁰**
$\vec{\alpha}$	α (şiddet)	0	0	$\ddot{\theta}_3 = \alpha_3 =$ $\mathbf{42.27}\ rd/s^2$	$\ddot{\theta}_4 = \alpha_4 =$ $\mathbf{95.5}\ rd/s^2$
	$\pm$ (yön)			↺ (+)	↺ (+)