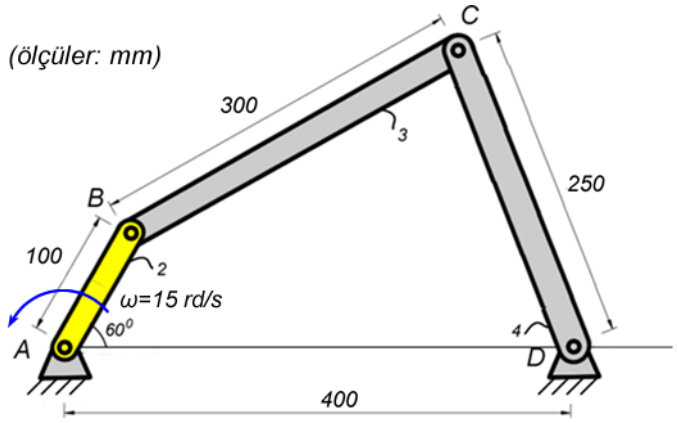
MAKİNE DİNAMİĞİ (6. Hafta)

MEKANİK SİSTEMLERİN İVME ANALİZİ-1

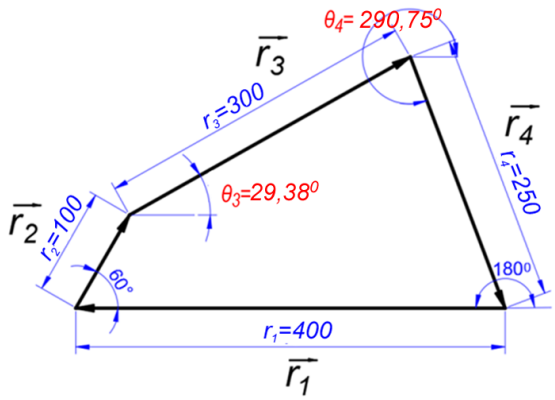
Daha önceki derslerde 4 çubuk mekanizmasının Konum Analizini ve Hız analizini yapmıştık. Bu işlemler için önce vektörel poliğonu oluşturduk. Ardından bu poligona göre Vektörel Konum Denklemini oluşturduk. Konum denklemini kullanarak bilinmeyenleri bulmaya çalıştık fakat Non Lineer denklemler çıktığı için, konum değerlerini geometrik yolla bulmuştuk. Bulduğumuz değerlere göre konum tablosunu doldurduk.

Konum denkleminin bir kez türevini alıp hız denklemini bulduk. Türevi alabilmek için değişkenlerin neler olduğunu bilmemiz gerekir. Bunun için konumu değişen büyükler için 1. Değişken tablosunu oluşturduk. Bunun için mekanizmada iki fotograf çekip konumu değişen büyüklükler (boy yada açısı değişenler) bize değişkenleri göstermektedir. Ardınan hız denklemini Vektörel yöntemle çözere bilinmeyen hız değerlerimizi bulduk. Bu işlemden sonra hedefimiz olan hız tablosunun içerisini doldurduk. Yapılan bu işlemlerin kısa özeti aşağıda verilmiştir.

Problemin tanımı



Vektörel poligon



Konum Denklemi

$$\vec{r_1} + \vec{r_2} + \vec{r_3} + \vec{r_4} = 0$$

$$r_1\,\overrightarrow{\mu(\theta_1)} + r_2\,\overrightarrow{\mu(\theta_2)} + r_3\,\overrightarrow{\mu(\theta_3)} + r_4\,\overrightarrow{\mu(\theta_4)} = 0$$

Konum Tablosu

	$\vec{r_1}$	$\vec{r_2}$	$\vec{r_3}$	$\vec{r_4}$
r (boy)	400 mm	100 mm	300 mm	250 mm
θ (açı)	180^0	60^0	**θ_3=29,38^0**	**θ_4=290,75^0**

Konum Değişken Tablosu *(1.Değişken Tablosu)*

(Konumdaki değişimleri gösterir, S: konum sabit , D: konum değişken*)*

	$\vec{r_1}$	$\vec{r_2}$	$\vec{r_3}$	$\vec{r_4}$
r	S	S	S	S
θ	S	**D**	**D**	**D**

Hız denklemi

$$r_2\,\dot{\theta}_2\,\overrightarrow{\sigma(\theta_2)} + r_3\,\dot{\theta}_3\,\overrightarrow{\sigma(\theta_3)} + r_4\,\dot{\theta}_4\,\overrightarrow{\sigma(\theta_4)} = 0$$

Hız Tablosu				
	$\overrightarrow{r_1}$	$\overrightarrow{r_2}$	$\overrightarrow{r_3}$	$\overrightarrow{r_4}$
$\dot{r}$	0	0	0	0
$\dot{\theta}$	0	15 rd/s	$\dot{\theta}_3 = -3.916\ rd/s$	$\dot{\theta}_4 = 3.091\ rd/s$

Hız tablosunu doldurduktan sonra artık ivme denklemi ve ivme tablosunu bulmaya geçebiliriz. Hız denkleminin bir kez daha türevini alıp ivme denklemini oluşturmalıyız. Fakat bunun için öncelikle denklemdeki değişkenlerin neler olduğunu bilmeliyiz. Denklem içinde dikkat edersek konum ve hızlar var. Konum büyüklüklerinin hangilerinin değişken olduğunu yukarıdaki 1. Değişken tablosu bize söylemişti. Hızdaki değişimleri göstermek için aşağıdaki 2. Değişken tablosunu doldurmalıyız. Bu tabloyu doldururken konumu zaten değişmeyen büyüklüklerin hızından bahsedilemez. Bunları sabit olarak göstereceğiz. Motora bağlı uzuvları ise yine sabit döndürülür. Yani mekanizmalarda motorlar sabit hızla dönme hareketi yapar (özel bir uygulama yok ise). Dolayısı ile bu uzuvlarda da hız değişimi olmayacağından sabit olarak gösterilecek. Mekanizmada yön değiştiren yada açık bir şekilde hızlanma ve yavaşlama yapan diğer tüm uzuvlar değişken hıza sahip demektir (yani bunların ivmesi vardır). Dolayısı ile bu uzuvlar değişken olarak gösterilecek.

Hız Değişken Tablosu *(2.Değişken Tablosu)*

(Hızdaki değişimleri gösterir, S: Hız yok-konum sabit, **S***: hız sabit, **D**: hız değişken*)*

	$\overrightarrow{r_1}$	$\overrightarrow{r_2}$	$\overrightarrow{r_3}$	$\overrightarrow{r_4}$
$\dot{r}$ (doğrusal hız)	S	S	S	S
$\dot{\theta}$ (açısal hız)	S	**S***	**D**	**D**

Tek serbestlik dereceli bir mekanizmayı çözebilmek için bu tabloda iki tane değişken çıkmalıdır. Farklı sayıda bir değişken çıkıyorsa bir hata yapılmış olabilir. Bu şekilde kontrol yapılabilir.

Değişken ve sabitleri hız denklemi üzerinde gösterelim. Bunun için 1. ve 2. Değişken tablolarına bakacağız.

$$\underset{\overset{\frown}{S}}{r_2} \;.\; \underset{\overset{\frown}{S^*}}{\dot{\theta}_2} \;.\; \underset{\overset{\frown}{D}}{\overrightarrow{\sigma(\theta_2)}} + \underset{\overset{\frown}{S}}{r_3} \;.\; \underset{\overset{\frown}{D}}{\dot{\theta}_3} \;.\; \underset{\overset{\frown}{D}}{\overrightarrow{\sigma(\theta_3)}} + \underset{\overset{\frown}{S}}{r_4} \;.\; \underset{\overset{\frown}{D}}{\dot{\theta}_4} \;.\; \underset{\overset{\frown}{D}}{\overrightarrow{\sigma(\theta_4)}} = 0$$

Denklemin türevini alalım. Bunun için yine şu aşağıdaki türev formüllerini kullanacağız.

- f(x)=a . b => f(x)'= 0 (iki sabitin türevi sıfırdır)
- f(x)=a . u => f(x)'= a . u' (bir sabit ve bir değişkenin türevi. Sabit aynen alınır değişkenin türevi ile çarpılır.)
- (u.v)'=u' v+u v' (iki değişkenin türevi, birincinin türevi çarpı yanındaki, ikincinin türevi çarpı yanındaki şeklinde işlem uygulanır)
- $\frac{d}{d\theta}\overrightarrow{\mu(\theta)} = \dot{\theta}.\overrightarrow{\sigma(\theta)}$ (μ birim vektörün türevi. Çıkarılışı için 2.notlara bakınız)
- $\frac{d}{d\theta}\overrightarrow{\sigma(\theta)} = -\dot{\theta}.\overrightarrow{\mu(\theta)}$ (σ birim vektörün türevi)

Bu kurallara göre hız denkleminin türevini alalım.

$$r_2\,\dot{\theta}_2\left(-\,\dot{\theta}_2\,\overrightarrow{\mu(\theta_2)}\right) + r_3\,\ddot{\theta}_3\,\overrightarrow{\sigma(\theta_3)} + r_3\,\dot{\theta}_3\left(-\dot{\theta}_3\,\overrightarrow{\mu(\theta_3)}\right) + r_4\,\ddot{\theta}_4\,\overrightarrow{\sigma(\theta_4)} + r_4\,\dot{\theta}_4\,(-\dot{\theta}_4\,\overrightarrow{\mu(\theta_4)}) = 0$$

Denklemi düzenleyelim. Elde edeceğimiz bu denklem **ivme denklemi**miz olur.

$$\boxed{-r_2\,\dot{\theta}_2^{\,2}\,\overrightarrow{\mu(\theta_2)} + r_3\,\ddot{\theta}_3\,\overrightarrow{\sigma(\theta_3)} - r_3\,\dot{\theta}_3^{\,2}\,\overrightarrow{\mu(\theta_3)} + r_4\,\ddot{\theta}_4\,\overrightarrow{\sigma(\theta_4)} - r_4\,\dot{\theta}_4^{\,2}\,\overrightarrow{\mu(\theta_4)} = 0}$$

İvme denklemini kullanarak aşağıdaki ivme tablosundaki bilinmeyenleri bulacağız.

İvme Tablosu				
	$\overrightarrow{r_1}$	$\overrightarrow{r_2}$	$\overrightarrow{r_3}$	$\overrightarrow{r_4}$
$\ddot{r}$ (doğrusal ivme, mm/s²)	0	0	0	0
$\ddot{\theta}$ (açısal ivme, rd/s²)	0	0	$\ddot{\theta}_3 = ?$	$\ddot{\theta}_4 = ?$

Denklem üzerinde bilinen ve bilinmeyen değerleri gösterelim.

$$-r_2\,.\,\dot{\theta}_2^{\,2}\,.\,\overrightarrow{\mu(\theta_2)} + r_3\,.\,\ddot{\theta}_3\,.\overrightarrow{\sigma(\theta_3)} - r_3\,.\,\dot{\theta}_3^{\,2}\,.\,\overrightarrow{\mu(\theta_3)} + r_4\,.\,\ddot{\theta}_4\,.\overrightarrow{\sigma(\theta_4)} - r_4\,.\,\dot{\theta}_4^{\,2}\,.\,\overrightarrow{\mu(\theta_4)} = 0$$

$$\overbrace{100}^{mm}\ \overbrace{15^2}^{(rd/s)^2}\ \overbrace{60^0}\qquad \overbrace{300}^{mm}\ \overbrace{?}\ \overbrace{29{,}38^0}\qquad \overbrace{300}^{mm}\ \overbrace{(-3.916)^2}^{(rd/s)^2}\ \overbrace{29{,}38^0}\qquad \overbrace{250}^{mm}\ \overbrace{?}\ \overbrace{290{,}75^0}\qquad \overbrace{250}^{mm}\ \overbrace{(3.091)^2}^{(rd/s)^2}\ \overbrace{290{,}75^0}$$

Denklemdeki iki tane bilinmeyen var. Bunları bulmak için önce birini seçip onu yok edelim. Yok etmek için yanındaki birim vektöre bakacağız. Bu birim vektörü hangi birim vektör ile skaler çarparsak sonuç sıfır çıkar. Bunun için 2 notlarda verdiğimiz şu formülü kullanacağız. $\overrightarrow{\mu(\theta_n)}\,.\,\overrightarrow{\sigma(\theta_n)} = 0$ (Dışlar farklı, içler aynı). Önce $\ddot{\theta}_4$ yı yok edelim. Bunun için yanındaki birim vektöre baktığımızda tüm denklemi $\overrightarrow{\mu(\theta_4)}$ ile çarpmamız gerektiğini görebiliriz.

$$\overrightarrow{\boldsymbol{\mu(\theta_4)}}\left[-r_2\,\dot{\theta}_2^{\,2}\,\overrightarrow{\mu(\theta_2)} + r_3\,\boldsymbol{\ddot{\theta}_3}\,\overrightarrow{\sigma(\theta_3)} - r_3\,\dot{\theta}_3^{\,2}\,\overrightarrow{\mu(\theta_3)} + r_4\,\boldsymbol{\ddot{\theta}_4}\,\overrightarrow{\sigma(\theta_4)} - r_4\,\dot{\theta}_4^{\,2}\,\overrightarrow{\mu(\theta_4)}\right] = 0$$

$$-r_2\dot{\theta}_2^{\,2}\overrightarrow{\mu(\theta_2)}\,\overrightarrow{\mu(\theta_4)} + r_3\ddot{\theta}_3\overrightarrow{\sigma(\theta_3)}\,\overrightarrow{\mu(\theta_4)} - r_3\dot{\theta}_3^{\,2}\overrightarrow{\mu(\theta_3)}\,\overrightarrow{\mu(\theta_4)} + r_4\ddot{\theta}_4\overrightarrow{\sigma(\theta_4)}\,\overrightarrow{\mu(\theta_4)} - r_4\dot{\theta}_4^{\,2}\overrightarrow{\mu(\theta_4)}\,\overrightarrow{\mu(\theta_4)} = 0$$

Birim vektör çarpımlarının skaler karşılıklarını yazalım (formüller için 2.notlara bakınız. Formüllerde Sin() lü ifadelerde önce $\overrightarrow{\mu(\theta)}$ nün açısı yazılmalıdır).

$$-r_2\dot{\theta}_2^{\,2}\overrightarrow{\mu(\theta_2)}\,\overrightarrow{\mu(\theta_4)} + r_3\boldsymbol{\ddot{\theta}_3}\overrightarrow{\sigma(\theta_3)}\,\overrightarrow{\mu(\theta_4)} - r_3\dot{\theta}_3^{\,2}\overrightarrow{\mu(\theta_3)}\,\overrightarrow{\mu(\theta_4)} + r_4\ddot{\theta}_4\overrightarrow{\sigma(\theta_4)}\,\overrightarrow{\mu(\theta_4)} - r_4\dot{\theta}_4^{\,2}\overrightarrow{\mu(\theta_4)}\,\overrightarrow{\mu(\theta_4)} = 0$$

$$\overbrace{Cos(\theta_2-\theta_4)}\qquad \overbrace{?}\ \overbrace{Sin(\theta_4-\theta_3)}\qquad \overbrace{Cos(\theta_3-\theta_4)}\qquad \overbrace{?}\ \overbrace{0}\qquad \overbrace{1}$$

$\ddot{\theta}_3$ yı denklemden çekersek formül şu şekilde olacaktır.

$$\ddot{\theta}_3 = \frac{r_2\dot{\theta}_2^{\,2}Cos(\theta_2-\theta_4) + r_3\dot{\theta}_3^{\,2}Cos(\theta_3-\theta_4) + r_4\dot{\theta}_4^{\,2}}{r_3\,Sin(\theta_4-\theta_3)}$$

Değerleri yerine yazalım ve sonucu bulalım.

$$\ddot{\theta}_3 = \frac{\overset{100}{mm}\ \overset{15^2}{(rd/s)^2}\,Cos(60^0-290{,}75^0) + \overset{300}{mm}\ \overset{(-3.916)^2}{(rd/s)^2}\,Cos(29{,}38^0-290{,}75^0) + \overset{250}{mm}\ \overset{(3.091)^2}{(rd/s)^2}}{\overset{300}{mm}\,Sin(290{,}75^0-29{,}38^0)}$$

Sonuç şu şekilde olacaktır.

$$\boldsymbol{\ddot{\theta}_3 = \alpha_3 = 42,27\ rd/s^2}\ \circlearrowleft$$

(sağ el kuralına göre artı ifadeler saatin tersi yönü gösterir)

Benzer şekilde denklemden $\ddot{\theta}_3$ tarafını yok edip $\ddot{\theta}_4$ çekelim. Bunun için denklemi $\overrightarrow{\mu(\theta_3)}$ ile çarpalım ve işlemleri devam ettirelim.

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mu(\theta_3)}}\left[-r_2\,\dot{\theta}_2^{\,2}\,\overrightarrow{\mu(\theta_2)} + r_3\,\boldsymbol{\ddot{\theta}_3}\,\overrightarrow{\sigma(\theta_3)} - r_3\,\dot{\theta}_3^{\,2}\,\overrightarrow{\mu(\theta_3)} + r_4\,\boldsymbol{\ddot{\theta}_4}\,\overrightarrow{\sigma(\theta_4)} - r_4\,\dot{\theta}_4^{\,2}\,\overrightarrow{\mu(\theta_4)}\right] = 0$$

$$-r_2\dot{\theta}_2^{\,2}\overrightarrow{\mu(\theta_2)}\,\overrightarrow{\mu(\theta_3)} + r_3\ddot{\theta}_3\overrightarrow{\sigma(\theta_3)}\,\overrightarrow{\mu(\theta_3)} - r_3\dot{\theta}_3^{\,2}\overrightarrow{\mu(\theta_3)}\,\overrightarrow{\mu(\theta_3)} + r_4\ddot{\theta}_4\overrightarrow{\sigma(\theta_4)}\,\overrightarrow{\mu(\theta_3)} - r_4\dot{\theta}_4^{\,2}\overrightarrow{\mu(\theta_4)}\,\overrightarrow{\mu(\theta_3)} = 0$$

$$-r_2\dot{\theta}_2^{\,2}\overbrace{\overrightarrow{\mu(\theta_2)}\,\overrightarrow{\mu(\theta_3)}}^{Cos(\theta_2-\theta_3)} + r_3\ddot{\theta}_3\overbrace{\overrightarrow{\sigma(\theta_3)}\,\overrightarrow{\mu(\theta_3)}}^{?\ \ 0} - r_3\dot{\theta}_3^{\,2}\overbrace{\overrightarrow{\mu(\theta_3)}\,\overrightarrow{\mu(\theta_3)}}^{1} + r_4\ddot{\theta}_4\overbrace{\overrightarrow{\sigma(\theta_4)}\,\overrightarrow{\mu(\theta_3)}}^{?\ \ Sin(\theta_3-\theta_4)} - r_4\dot{\theta}_4^{\,2}\overbrace{\overrightarrow{\mu(\theta_4)}\,\overrightarrow{\mu(\theta_3)}}^{Cos(\theta_4-\theta_3)} = 0$$

$$\ddot{\theta}_4 = \frac{r_2\dot{\theta}_2^{\,2}Cos(\theta_2-\theta_3) + r_3\dot{\theta}_3^{\,2} + r_4\dot{\theta}_4^{\,2}Cos(\theta_4-\theta_3)}{r_4\,Sin(\theta_3-\theta_4)}$$

$$\ddot{\theta}_4 = \frac{\frac{100}{mm}\frac{15^2}{(rd/s)^2}Cos(60^0-29{,}38^0) + \frac{300}{mm}\frac{(-3.916)^2}{(rd/s)^2} + \frac{250}{mm}\frac{(3.091)^2}{(rd/s)^2}Cos(290{,}75^0-29{,}38^0)}{\frac{250}{mm}Sin(29{,}38^0-290{,}75^0)}$$

Sonuç şu şekilde olacaktır.

$$\boldsymbol{\ddot{\theta}_4 = \alpha_4 = 95,5\ rd/s^2}\ \circlearrowleft$$

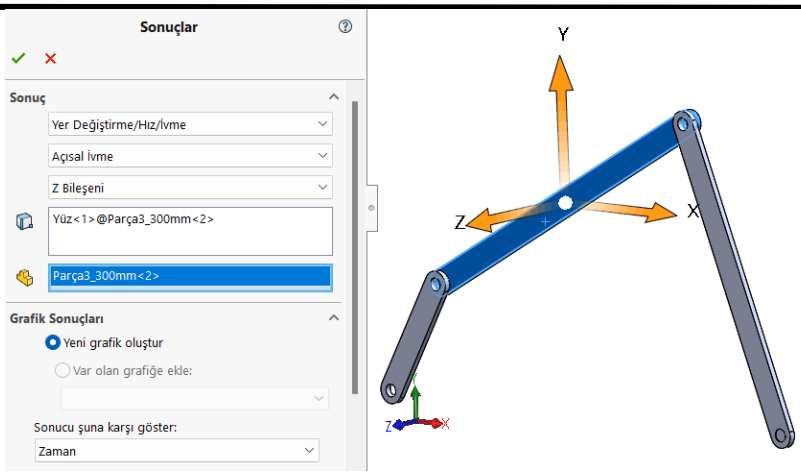
(sağ el kuralına göre artı ifadeler saatin tersi yönü gösterir)

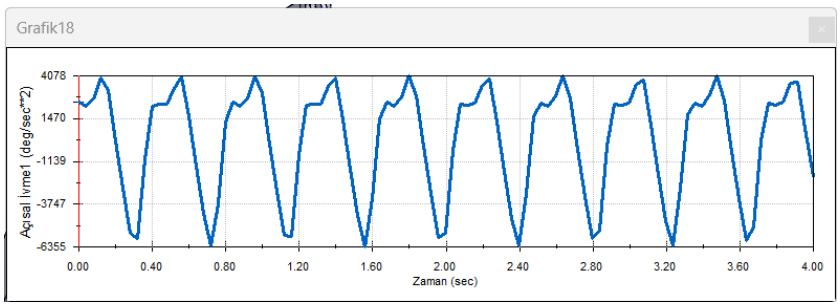
Buna göre sonuç İvme Tablosu şu şekilde olmuş olur.

İvme Tablosu				
	$\vec{r_1}$	$\vec{r_2}$	$\vec{r_3}$	$\vec{r_4}$
$\ddot{r}$ (doğrusal ivme, mm/s²)	0	0	0	0
$\ddot{\theta}$ (açısal ivme, rd/s²)	0	0	$\boldsymbol{\ddot{\theta}_3 = 42,27\ rd/s^2}$	$\boldsymbol{\ddot{\theta}_4 = 95,5\ rd/s^2}$

İvme Analizi Sonuçlarının Solidworks Kullanarak Doğrulanması

Bunun için Solidwork-**Premium** içerisindeki **Hareket Analizi** modülünün açılması gerekir. Bir önceki notlarda hız analizi yaparken uyguladığımız yöntemlerin aynısını ivme için de yapabiliriz. Hız değerlerini okuduğumuz yerden bu sefer ivme değerlerini okuyacağız.

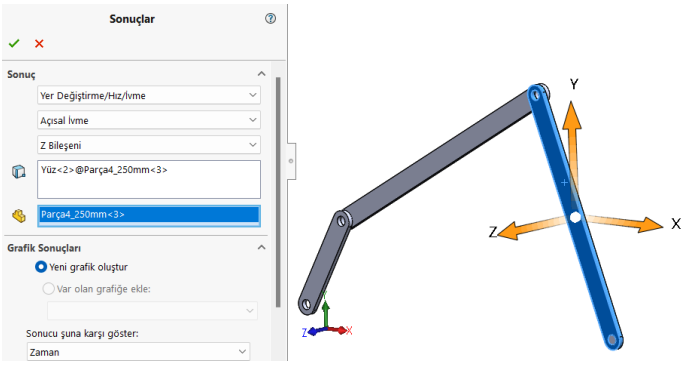


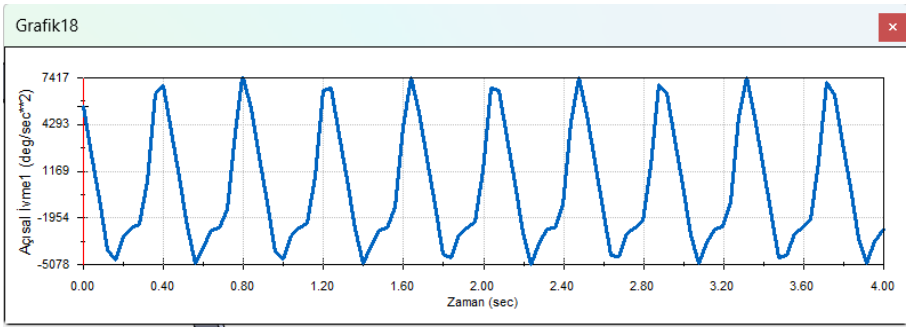


Grafik değerlerini Excelde açtığımızda 0. Saniyede yani 2 numaralı kol 60 derecede iken 3 numaralı çubuğun açısal ivmesinin 2421,706 derece/sn^2 olduğunu görüyoruz. Dereceyi radyan cinsinden yazarak dönüşüm yaparsak ($R = D * 2\pi/360$) $\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{3}} = \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{3}} = \mathbf{42,266}\ \boldsymbol{rd/s^2}$ Aynı sonucu bulduk.

	A
1	Grafik18
2	Zaman (sec),"Açısal İvme1 (deg/sec**2)"
3	0,2421.70660818532
4	0.04,2214.14035951268
5	0.08,2630.50092875621
6	0.12,3926.01773002887
7	0.16,3139.92269871009
8	0.2,82.9993907867248
9	0.24,-2812.59725834208
10	0.28,-5548.59717569808

4. çubuğun açısal ivmesine bakalım.

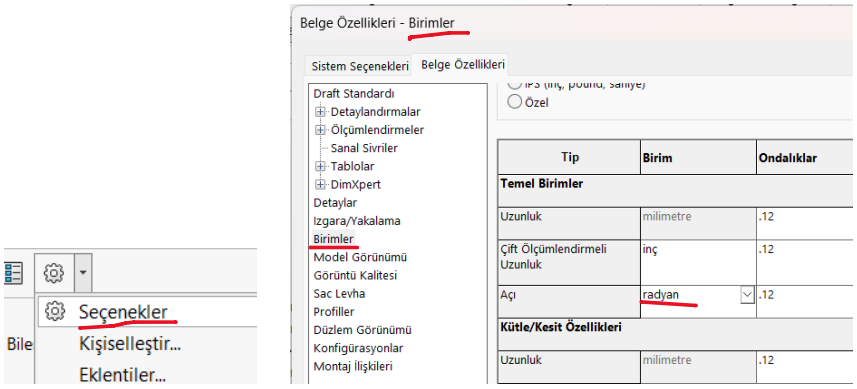




Grafik değerlerini Excele çıkartırsak 4.çubuğun ivmesinin 5471.96 derece/sn^2 olduğunu görürüz. Dereceyi radyan cinsinden yazarak dönüşüm yaparsak $\ddot{\theta}_4 = \alpha_4 = 95,503\ rd/s^2$ çıkar. Sonuçlar aynıdır.

	A
1	Grafik18
2	Zaman (sec),"Açısal İvme1 (deg/sec**2)"
3	0,5471.96035945561
4	0.04,2278.49153940452
5	0.08,-778.438162900804
6	0.12,-4110.89471845726
7	0.16,-4825.47101934488
8	0.2,-3246.80651308907
9	0.24,-2693.39286054154
10	0.28,-2438.33628002814

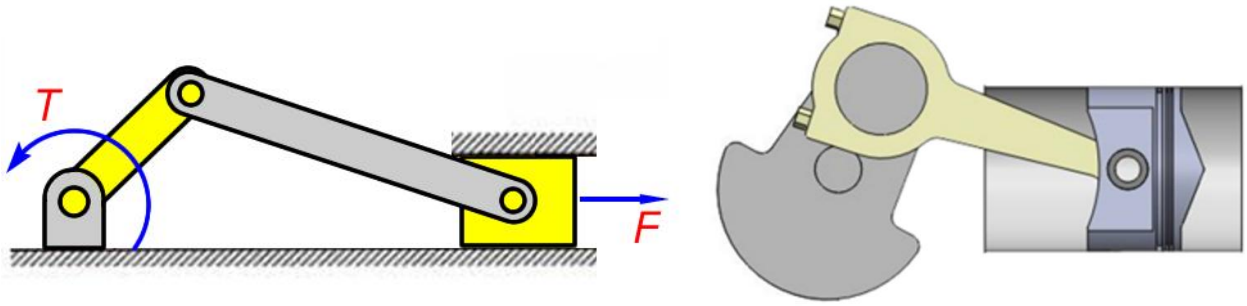
Not: Solidworks'ün varsayılan açılış derece ayarları Dereceye ayarlandığı için burada ivmeleri Derece/s2 olarak getiriyor. Bilimsel olarak radyan/s2 olarak getirmek için aşağıdaki ekranlardan bu ayarını değiştirebiliriz.



ÖDEVLER

Ödev 1: Yukarıda verilen Analitik ve Nümerik (Solidworks) ivme hesaplarının bir benzerini tasarladığınız Krank Biyel mekanizması için yapın. Mekanizmadaki tüm uzuvların ivme grafiklerini çıkarın.

Aynı zamanda C# programı kullanarak analitik formüllerle yaptığınız işlemleri mekanizmanın tüm hareketleri için hesaplatarak grafiğini programla çizdirin. Programla elde ettiğiniz grafik sonuçları ile Solidworks'ten elde ettiğiniz grafik sonuçları aynı mı kontrol edin.

Kısaca Krank Biyel Mekanizmasının aşağıdaki üç yöntemle İvme analizini yapın.

a) **Vektörel** denklemler kullanarak analitik **İvme hesaplarını** yapın.
b) **Solidworks** kullanarak Nümerik **İvme hesaplarını** yapın
c) **C# programı** ile tüm açılarda analitik **İvme hesaplarını** programlayarak simüle edin.