DİNAMİK (9.hafta)

(1)

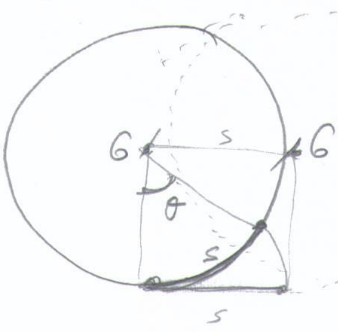
MUTLAK GENEL DÜZLEMSEL HAREKET

Bir cisim düzlemde hem dönüyor hem de öteleniyorsa genel bir hareket yapıyor denebilir. Bu cismin analizi üzerinde alınacak sabit bir çizginin dönmesi ile ve üzerindeki herhangi bir noktanın ötelenmesi ile yapılır. Noktanın bir yörünge boyunca ötelenmesini s ile gösterirsek ve çizginin dönmesini de θ ile gösterirsek, cismin hareketi s konumuna ve θ açısal konumuna bağlı olmuş olur. Daha sonra problemin geometrisi kullanılarak s ve θ arasında bağıntı kurulabilir.

Bunun için öncelikle s ve θ arasında konumu veren bağıntı elde edilir. Bu bağıntıya konum denklemi diyeceğiz.

Daha sonra (zamana bağlı olarak değişen) değişkenlere bağlı olarak birer daha türev aldığımızda hız denklemini bulmuş oluruz.

Hız denkleminin bir kez daha türevini alırsak ivme denklemini bulmuş oluruz.



Örneğin bir teker yuvarlanırken hem ötelenir hem de döner. Ötelenirken s yolunu kateder ve θ açısı kadar döner. G noktasının konumu, hızı ve ivmesi ne olur.

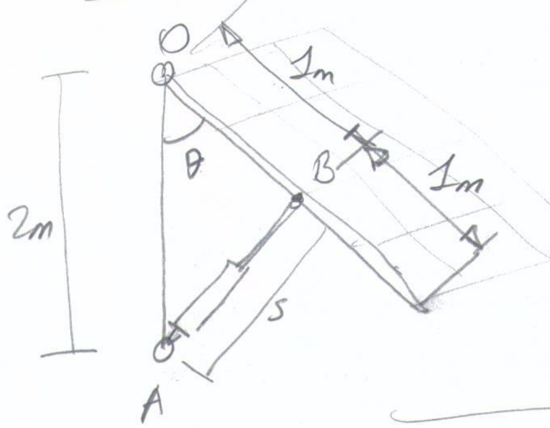
Konum denklemi $s_G = r \cdot \theta$

Hız denklemi $v_G = r \cdot \omega$

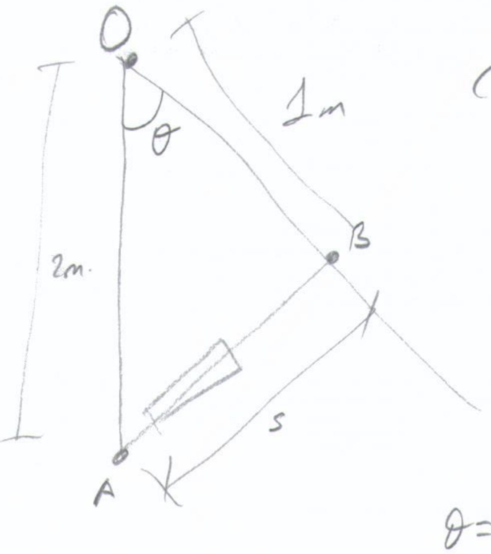
İvme denklemi $a_G = r \cdot \alpha$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = v \qquad \frac{\partial \theta}{\partial t} = \omega \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = a \qquad \frac{\partial \omega}{\partial t} = \alpha$$

Örnek 1 Şekildeki gibi büyük bir pencere hidrolik sistem kullanılarak açılıp kapatılmaktadır. Eğer silindir boyu sabit 0,5 m/s hızla artıyorsa, $\theta = 30°$ iken pencerenin açısal hızı ve açısal ivmesini bulunuz.

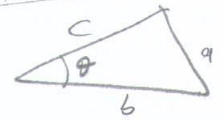


Burada pencerenin açısal hareketi θ ya bağlıdır. Silindirin boyu ise s mesafesine bağlıdır. Bu ikisi arasında bir bağıntı kurmalıyız. Bulacağımız denklem konum denklemi olacaktır ve bu denklemden konumları buluruz. Değişkenlere bağlı olarak bunun bir kez daha türevini alırsak hız denklemini buluruz ve buradan da hızları buluruz. Hız denkleminde bir kez türevini alırsak ivme denklemini buluruz ve buradan ivmeleri hesaplayabiliriz.



θ ile s arasındaki bağıntıyı Cosinüs teoremi verebilir.

Hatırlatma



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2ab \cdot \cos\theta$$

$$s^2 = 1_m^2 + 2_m^2 - 2 \cdot (2m) \cdot (1m) \cdot \cos\theta$$

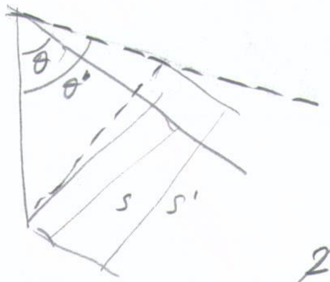
$$\boxed{s^2 = 5 - 4 \cdot \cos\theta}$$ Konum denklemi

$\theta = 30°$ iken $s^2 = 5 - 4 \cdot \cos 30$

$|s = 1,239\ m|$ bulunur.

(3)

Konum denkleminin birkez türevini alalım, hız denklemini bulalım. Türev alabilmek için zamana bağlı olarak değişkenleri bilmeliyiz. Sistem hareket hakkındaki ilk fotoğraf gelecek S ve θ nın değiştiğini görürüz. Değişkenlerimiz bunlardır.



Değişkenler: S, θ

$$\underbrace{S^2}_{d} = 5 - 4\cdot\cos\underbrace{\theta}_{d}$$

$$2S\cdot\dot{S} = 0 - 4\cdot(-\sin\theta)\cdot\dot{\theta}$$

$$\cancel{2}\cdot S\, v = +\frac{\cancel{4}}{2}\sin\theta\cdot w$$

$$\boxed{S\cdot v = 2\cdot\sin\theta\cdot w}$$

Hız denklemi

$$\underset{s}{a}\cdot\underset{d}{u} \Rightarrow a\cdot u'$$

$$\underset{s}{a}\cdot\underset{d}{u}\cdot\underset{d}{v} = a\cdot u' v + a\cdot u\cdot v'$$

$$\dot{s} = \frac{\partial s}{\partial t} = v$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial\theta}{\partial t} = w$$

Silindirin hızı sabit $v = 0{,}5\ m/s$ idi. S konumu 1,239, θ açısı 30° ve w bilinmiyor.

$$S\cdot v = 2\cdot\sin\theta\cdot w$$

$$1{,}239m\cdot 0{,}5\ m/s = 2\cdot\sin 30\cdot w$$

$$w = 0{,}620\ rad/s.$$

Hız denklemini bir kez daha türevini alırsak ivme denklemini buluruz. Türev alabilmek için zamana bağlı olarak değişkenleri bilmeliyiz. Hız denkleminin türevini alacağımızdan değişen hızlar hangileri sabit hızlar hangileri belirlemeliyiz. Burada v = sabit hız. w hızı değişiyor. Birde önceki denklemlerde konumlarda (s, θ) değişkendir.

Değişkenler, s, v, θ, w

$$\underbrace{S}_{d}\cdot\underbrace{v}_{s} = 2\cdot\underbrace{\sin\theta}_{d}\cdot\underbrace{w}_{d}$$

$$\dot{s}\, v + [redacted] = 2\cdot\cos\theta\cdot\dot{\theta}\cdot w + 2\cdot\sin\theta\cdot\dot{w}$$

$$\boxed{v^2 + [redacted] = 2\cdot\cos\theta\cdot w^2 + 2\cdot\sin\theta\cdot\alpha}$$

ivme denklemi oldu.

$$\dot{s} = \frac{ds}{dt} = v$$

$$\dot{v} = \frac{\partial v}{\partial t} = a$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial\theta}{\partial t} = w$$

$$\dot{w} = \frac{\partial w}{\partial t} = \alpha$$

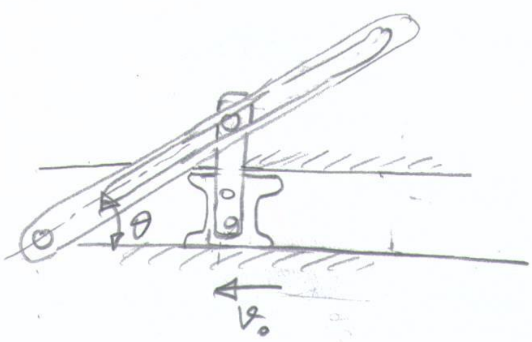
$$(0{,}5)^2 + 1{,}239\cdot a = 2\cdot\cos 30\cdot(0{,}620)^2 + 2\cdot\sin 30\cdot\alpha$$

→ 0 dır. Çünkü v = sabit, $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$ dır.

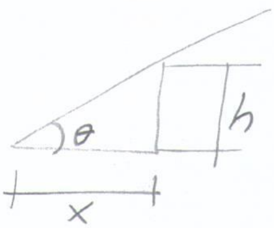
$$\Rightarrow \alpha = -0{,}415\ rad/s^2$$

(4)

Örnek 2: Şekildeki gibi bir piston kızak içerisinde sabit v_0 hızı ile hareket etmektedir. Piston kayar pimle çubuğa bağlıdır. Çubuğun açısal hızını ve ivmesini θ ya bağlı olarak bulunuz.



a) **Konum denklemi:** Önce hareketi oluşturan büyüklükler arasında konum denklemini kuralım.



$$\tan\theta = \frac{h}{x} \Rightarrow x = \frac{h}{\tan\theta}$$

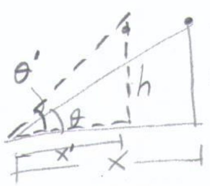
$$\frac{1}{\tan\theta} = \cot\theta$$

$$\boxed{x = h \cdot \cot\theta}$$

Konum denklemi:

Bu denklemden herhangi bir anda fotoğraf çekildiğinde açı ve konumlar bulunabilir.

b) **Hız denklemi:** Konum denkleminin zamana bağlı olarak birer türevi alınması hız denklemini verecektir. Türevi alabilmek için ise değişkenleri bilmeliyiz. Yani zaman ilerledikçe hangi büyüklükler değişiyor. İki defa fotoğraf çekersek bu iki fotoğrafta hangi konumlar değişmektedir görebiliriz. Konumu değişenler x, θ dır.



Hız sabit $\exists\ v = v_0$

$$\underbrace{x}_{d} = \underbrace{h}_{s} \cdot \underbrace{\cot\theta}_{d}$$

$$\dot{x} = h \cdot (-\csc^2\theta) \cdot \dot{\theta}$$

$$v_0 = -h \cdot \csc^2\theta \cdot \omega$$

$$\frac{\partial \cot x}{\partial t} = -\csc^2 x$$

$$\csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \dot{x} = v$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \dot{\theta} = \omega$$

$$V_0 = -h\cdot\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)^2\cdot w \Rightarrow \boxed{w = -\frac{V_0\cdot\sin^2\theta}{h}}$$ Hız denklemi

5

c) İvme denklemi: Hız denklemini zamana bağlı olarak birkez daha türev alırsak ivme denklemini buluruz. Türev alabilmek için zaman ile birlikte konum ve hızda hangi büyüklükler değişmektedir, bilmeliyiz. Bu denklemdeki v hızı sabittir. $v = V_0$ w değişkendir. Daha önceki adımda θ nında değişken olduğunu biliyoruz.

Değişkenlerimiz; = w, θ dır.

$y = \sin^2 u \Rightarrow y' = u'\cdot\sin 2u$

$\sin 2x = 2\cdot\sin x\cdot\cos x$

$$\underbrace{w}_{d} = -\frac{V_0}{\underbrace{h}_{s}}\,\underbrace{\sin^2\theta}_{d}$$

$$\dot{w} = -\frac{V_0}{h}\cdot\left(\sin 2\theta\cdot\dot{\theta}\right)$$

$$\alpha = -\frac{V_0}{h}\cdot\left(\sin 2\theta\cdot w\right)$$

Burası ivme denklemi oldu. Fakat ivmeden θ ya bağlı olarak istediğimiz için w den kurtulmalıyız.

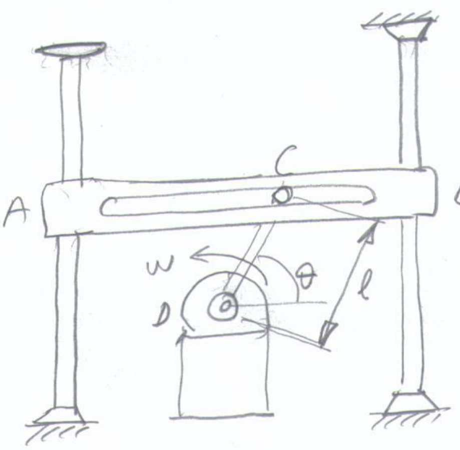
$w = -\frac{V_0}{h}\cdot\sin^2\theta$ idi.

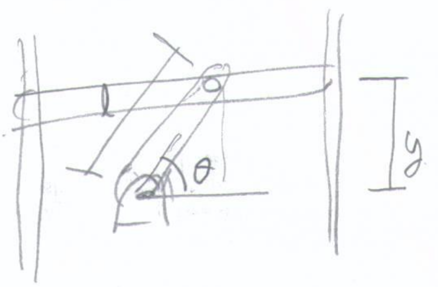
$$\alpha = -\frac{V_0}{h}\cdot\sin 2\theta\cdot\left(-\frac{V_0}{h}\cdot\sin^2\theta\right)$$

$$\boxed{\alpha = \left(\frac{V_0}{h}\right)^2\cdot\sin 2\theta\cdot\sin^2\theta}$$ θ ya bağlı ivme denklemi.

(6)

Örnek 3 Şekildeki mekanizmada motora bağlı DC çubuğu sabit bir açısal hızla dönmektedir. AB çubuğunun hız ve ivmesini bulunuz. AB çubuğu dikey çubuklar arasına yataklanmıştır.





a) Konum Denklemi: Değişken büyüklükler (θ, y) arasında bağlantıyı sağlayan denklemi bulalım.

$$\boxed{y = l \cdot \sin\theta}$$ Konum denklem

b) Hız denklemi: Konum denk. zamana göre 1 kez türevini alalım. Değişkenler θ ve y dir.

$$\underbrace{y}_{d} = \underbrace{l}_{s} \cdot \sin \underbrace{\theta}_{d}$$

$$\dot{y} = l \cdot \cos\theta \cdot \dot{\theta} \Rightarrow \boxed{V_{AB} = l \cdot \cos\theta \cdot \omega_{DC}}$$

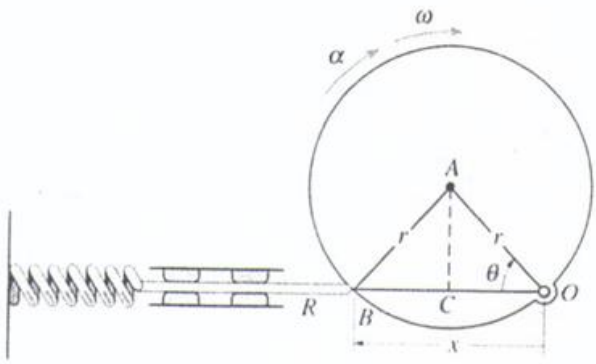
c) İvme denklemi: 1 kez daha türev alalım. Değişkenler $\omega = sbt$, $\theta = değ.$, $\dot{y} = değ.$

$$\underbrace{\dot{y}}_{d} = \underbrace{l}_{s} \cdot \underbrace{\cos\theta}_{d} \cdot \underbrace{\dot{\theta}}_{s}$$

$$\ddot{y} = l \cdot (-\sin\theta \cdot \dot{\theta}) \cdot \dot{\theta} \Rightarrow \boxed{a_{AB} = -l \cdot \sin\theta \cdot \omega_{DC}^2}$$

Örnek 4

Şekil 16–8'de gösterilen R çubuğunun ucu bir yay vasıtasıyla kamla temasını sürdürmektedir. Kam bir $\boldsymbol{\alpha}$ açısal ivmesi ve $\boldsymbol{\omega}$ açısal hızıyla O noktasından geçen bir eksen etrafında döndüğüne göre, çubuğun, kamın keyfi bir θ konumunda bulunduğu andaki hız ve ivmesini hesaplayınız.



Şekil 16–8

ω = sabit değil
çünkü α var.

ÇÖZÜM

Konum-Koordinat Denklemi. Analiz için, OA çubuğunun açısal hareketi, yani $\omega = d\theta/dt$, ve çubuğun *doğrusal hareketi* (veya B noktasının hareketinin yatay bileşeni), yani $v = dx/dt$ ile tanımlanan kamın *dönme* hareketini ifade etmek üzere x ve θ koordinatları seçilmiştir. Bu koordinatlar *sabit O noktasından* ölçülür ve trigonometri kullanılarak aralarında bağıntı kurulabilir. $OC = OB = r\cos\theta$ olduğundan, Şekil 16–8,

$$x = 2r\cos\theta$$

dir.

Zamana Göre Türevler. Kalkülüsün zincir kuralı kullanılarak

$$\frac{dx}{dt} = -2r\sin\theta\frac{d\theta}{dt} \qquad \textit{Yanıt}$$

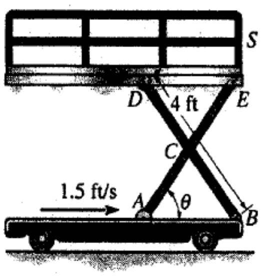
$$v = -2r\,\omega\sin\theta$$

$$\frac{dv}{dt} = -2r\left(\frac{d\omega}{dt}\right)\sin\theta - 2r\omega\left(\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right)$$

$$a = -2r(\alpha\sin\theta + \omega^2\cos\theta) \qquad \textit{Yanıt}$$

elde edilir. Eksi işaretleri v ve a'nın pozitif x eksenine ters doğrultuda olduğunu gösterir.

Örnek 5



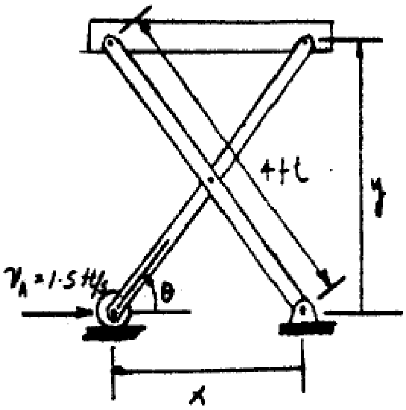
16-34. The scaffold S is raised hydraulically by moving the roller at A toward the pin at B. If A is approaching B with a speed of 1.5 ft/s, determine the speed at which the platform is rising as a function of θ. The 4-ft links are pin-connected at their midpoint.

$x = 4\cos\theta \qquad y = 4\sin\theta$

$\dot{x} = -4\sin\theta\dot{\theta} \qquad$ However, $\dot{x} = -\upsilon_A = -1.5$ ft/s

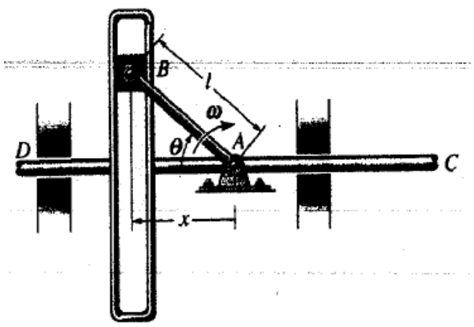
$-1.5 = -4\sin\theta\dot{\theta} \qquad \dot{\theta} = \dfrac{0.375}{\sin\theta}$

$\dot{y} = \upsilon_y = 4\cos\theta\dot{\theta} = 4\cos\theta\left(\dfrac{0.375}{\sin\theta}\right) = 1.5\cot\theta \qquad$ **Ans**



Örnek 6

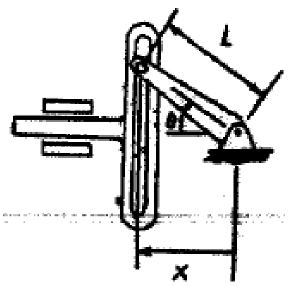
16-35. The mechanism is used to convert the constant circular motion ω of rod AB into translating motion of rod CD. Determine the velocity and acceleration of CD for any angle θ of AB.



$x = l\cos\theta$

$\dot{x} = v_x = -l\sin\theta\dot{\theta}$

$\ddot{x} = a_x = -l\left(\sin\theta\ddot{\theta} + \cos\theta\dot{\theta}^2\right)$



Here $v_x = v_{CD}$, $a_x = a_{CD}$, and $\dot{\theta} = \omega$, $\ddot{\theta} = \alpha = 0$.

$v_{CD} = -l\sin\theta(\omega) = -\omega\, l\sin\theta \qquad$ **Ans**

$a_{CD} = -l\left[\sin\theta(0) + \cos\theta(\omega)^2\right] = -\omega^2 l\cos\theta \qquad$ **Ans**

Negative signs indicate that both v_{CD} and a_{CD} are directed opposite to positive x.