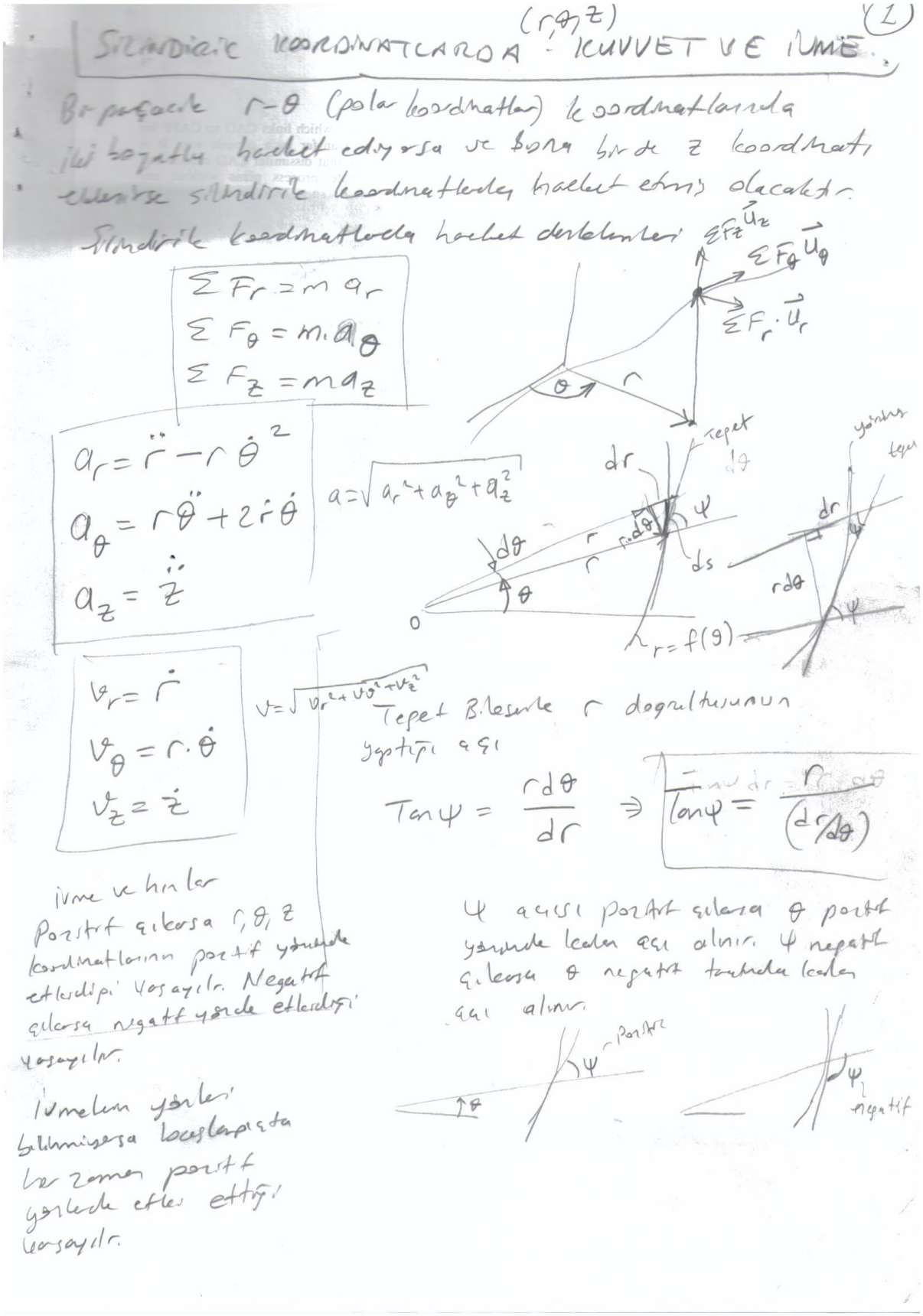
DİNAMİK (6.hafta)

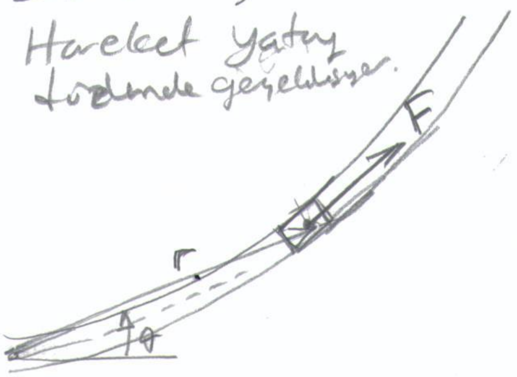
POLAR VE SİLİNDİRİK HAREKETTE KUVVET VE İVME

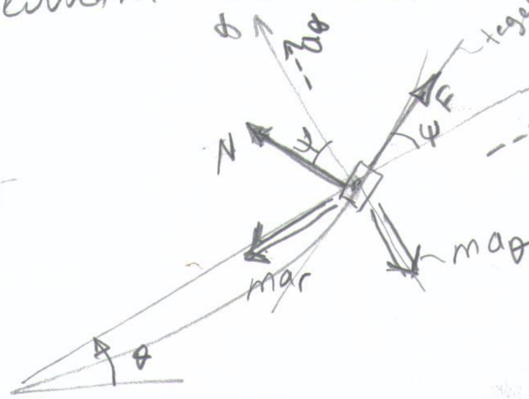


(2)

Örnek 1 10 N'luk bir cisim eğrisel camdan, sürtünmesiz bir borunun içinde kutupsal (Polar) koordinatlarda hareket etmektedir. Hareketin yolu zamana bağlı olarak $r = 3t^2$ [m] ve $\theta = 0,5\,t$ [rad] ile ifade edilmektedir. Cisim boru içinde hava ile hareket ettirilmektedir. 1 sn'de gerekli F kuvvetini bulunuz.

Hareket yatay düzlemde gerçekleşiyor.





Cismi yol üzerinde iteleyen kuvvet teğet F kuvvetidir. Cismi yol üzerinde tutan, dışarı savrulmasına engel olan kuvvette N kuvvetidir. Oluşan atalet kuvvetlerde ivmelere zıt yöndedir. Dolayısıyla önce kuvvetlerin doğru açılarını hesaplayalım. Daha sonra atalet kuvvetlerini içinde barındıran hareket denklemlerini yazalım.

$$\tan\psi = \frac{r}{dr/d\theta}$$

(r fonksiyonu θ ya bağlı yazmalıyız)

$\theta = 0,5\,t$

$t = \frac{\theta}{0,5}$

$r = 3 \cdot \left(\frac{\theta}{0,5}\right)^2$

$r = 3 \cdot \frac{\theta^2}{0,25}$

$r = 12\,\theta^2$ olur

$$\frac{dr}{d\theta} = 12 \cdot 2 \cdot \theta = 24\,\theta$$

$$\tan\psi = \frac{12 \cdot \theta^2}{24\,\theta}$$

$\theta = 0,5$ 1 sn'deki açı

$\theta = 0,5 \cdot 1 = 0,5$ rad

$$\tan\psi = \frac{12 \cdot 0,5^2}{24 \cdot 0,5}$$

$$\tan\psi = 0,25$$

$$\psi = 14,04^\circ$$

(3)

Hareket Denklemlerini yazalım

$$m = \frac{G}{g} = \frac{10\,N}{9,81} = 1,019\,kg$$

$$\nearrow^{+} \quad \Sigma F_r = m.a_r$$

$$F.\cos\psi - N.\sin\psi - m a_r = 0$$

$$F.\cos 14,04 - N.\sin 14,04 - 1,019 \cdot a_r = 0$$

$$\nwarrow^{+} \quad \Sigma F_\theta = m a_\theta$$

$$F\sin\psi + N.\cos\psi - m.a_\theta = 0$$

$$F.\sin 14,04 + N.\cos 14,04 - 1,019 \cdot a_\theta = 0$$

Elimizde iki denklem fakat 4 bilinmeyen (F, N, a_r, a_θ) var. Kalanları başka denklemlerden bulalım. Formüllerimiz

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \qquad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

$$r = 3t^2\Big|_{t=1} = 3\ m. \qquad \theta = 0,5\,t\Big|_{t=1} = 0,5\ rad.$$

$$\dot{r} = 6t\Big|_{t=1} = 6\ m/s \qquad \dot{\theta} = 0,5\ rad/s$$

$$\ddot{r} = 6\ m/s^2 \qquad \ddot{\theta} = 0$$

$$a_r = 6 - 3 \cdot 0,5^2 \qquad a_\theta = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 6 \cdot 0,5$$

$$a_r = 5,25\ m/s^2 \qquad a_\theta = 6\ m/s^2$$

Yukarıdaki denklemler yine yazılır

$$F.\cos 14,04 - N.\sin 14,04 = 1,019 \cdot 5,25$$

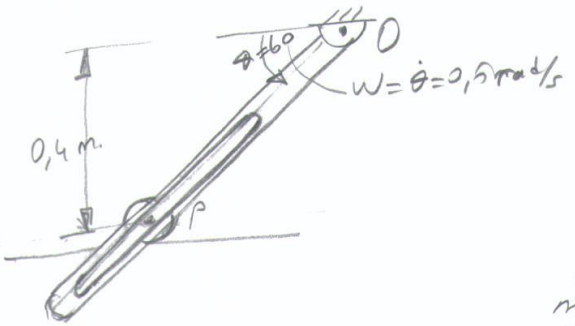
$$F.\sin 14,04 + N.\cos 14,04 = 1,019 \cdot 6$$

$$F = 6,68\ N$$

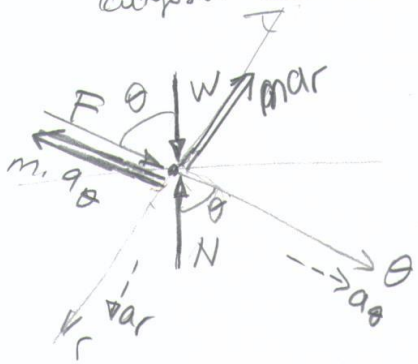
$$N = 4,64\ N \quad \text{çıkar.}$$

(4)

Örnek 2 : Şekildeki gibi 2 kg lık bir silindir pim vasıtasıyla olukla bir kola bağlanmıştır. Silindir oluk içinde ve yatay düzlem üzerinde sürtünmesiz olarak kaydırılmaktadır. Kol sabit 0,5 rad/s lik bir hızla döndürülmektedir. $\theta = 60°$ olduğu anda kolun pime uygulacağı kuvveti bulunuz.



Hareketde hem dönme hemde doğrusal ivmelenme olduğu için kutupsal koordinatlarda çözümleyiniz.



Hareket denklemlerini yazalım

$$\overset{+}{\Sigma} F_r = m \cdot a_r \quad W \cdot \operatorname{Sen}60 - N \cdot \operatorname{Sen}\theta - m \cdot a_r = 0$$

$$19{,}62 \cdot \operatorname{Sen}60 - N \cdot \operatorname{Sen}60 - 2 \cdot a_r = 0$$

$$\overset{+}{\Sigma} F_\theta = m \cdot a_\theta \quad W \cdot \operatorname{Cos}60 + F - N \cdot \operatorname{Cos}\theta - m \cdot a_\theta = 0$$

$$19{,}62 \cdot \operatorname{Cos}60 + F - N \cdot \operatorname{Cos}60 - 2 \cdot a_\theta = 0$$

Elimde 2 denklem fakat 4 bilinmeyen var. (F, N, a_r, a_θ) İkmeler

Formüllerden bulalım.

(5)

$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ | $a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$

$r = \frac{0,4}{\sin\theta} = \frac{0,4}{\sin 60} = 0,461\ m$

$\dot{r} = 0,4 \cdot \csc\theta$

$\dot{r} = -0,4 \cdot \csc\theta \cdot \cot\theta \cdot \dot{\theta}$

$\dot{r} = -0,4\ \csc 60 \cdot \cot 60 \cdot 0,5$

$\dot{r} = -0,4 \cdot 0,5 \left(\frac{1}{\sin 60}\right) \cdot \left(\frac{1}{\tan 60}\right)$

$\dot{r} = -0,2\ (1,154)(0,577)$

$\dot{r} = -0,133\ rad/s$

$\frac{1}{\sin x} = \csc x$; $\frac{1}{\cos x} = \sec x$; $\frac{1}{\tan x} = \cot x$

$\frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cdot \cot x$

$\sin u = \dot{u}\cos u$

$\tan x = \frac{a}{b} = \frac{\sin x}{\cos x}$; $\cot x = \frac{b}{a} = \frac{\cos x}{\sin x}$

$\sin\frac{a}{c} = \frac{1}{\csc}$; $\csc = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sin}$; $\cos = \frac{b}{c} = \frac{1}{\sec x}$; $\sec x = \frac{c}{b}$

$\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$

$\ddot{r}$ için hesaplayalım

$\ddot{r} = -0,4 \cdot \dot{\theta}^{0,5} \cdot \csc\theta \cdot \cot\theta$

$a \cdot u \cdot v = a\dot{u}v + auv$

$\dot{r} = -0,2 \cdot \csc\theta \cdot \cot\theta$

$\ddot{r} = -0,2 \left[(-\csc\theta \cdot \cot\theta)\cdot\dot{\theta}\cdot\cot\theta - 0,2\csc\theta\cdot(-\csc^2\theta)\right]$

$\ddot{r} = +0,2\ \csc 60 \cdot \cot 60 \cdot 0,5 \cdot \cot 60 + 0,2 \cdot \csc 60 \cdot \csc^2 60$

$\ddot{r} = 0,2 \cdot \left(\frac{1}{\sin 60}\right)\cdot\left(\frac{1}{\tan 60}\right)\cdot 0,5 \cdot \left(\frac{1}{\tan 60}\right) + 0,2 \cdot \left(\frac{1}{\sin 60}\right)\cdot\left(\frac{1^2}{\sin^2 60}\right)$

$\ddot{r} = 0,2 \cdot 1,154 \cdot 0,577 \cdot 0,5 \cdot 0,577 + 0,2 \cdot 1,154 \cdot 1,33$

$0,0384$; $0,153$

$\ddot{r} = 0,1914\ m/s^2$

$\theta = 60$ derece

$\dot{\theta} = 0,5$ rad/s

$\ddot{\theta} = 0$ (açısal ivme sabittir. Açısal ivme sıfır olur.)

(6)

$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$

$a_r = 0,1914 - 0,461 \cdot 95_{\theta}^2$

$a_r = 0,0761 \ m/s$

$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$

$= 0,461 \cdot 0 + 2 \cdot (-0,133) \cdot 0,5$

$a_\theta = -0,133 \ m/s$

Hareket denklemde yerine yazalım

$-\cos 60 \ / \ 19,62 \cdot \sin 60 - N \cdot \sin 60 = 2 \cdot 0,0761$

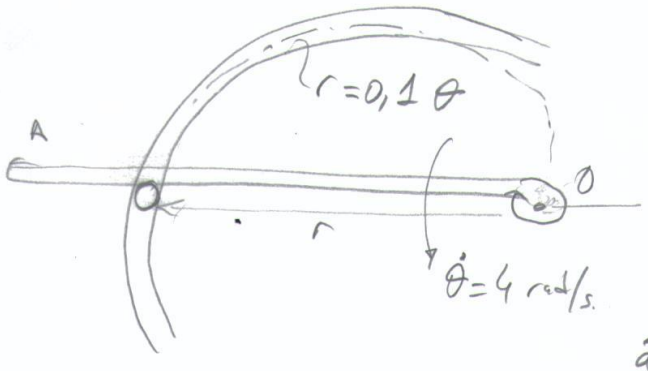
$+\sin 60 \ / \ 19,62 \cdot \cos 60 + F - N \cdot \cos 60 = 2 \cdot (-0,133)$

$$F = \frac{\overbrace{-2 \cdot 0,0761}^{-0,0761} \cdot \cos 60 + \overbrace{19,62 \cdot \sin 60 \cdot \cos 60}^{8,495} - 2 \cdot 0,133 \cdot \sin 60 - \underbrace{19,62 \cos 60 \cdot \sin 60}_{-8,495}}{\sin 60 \text{ paydada.}} =$$

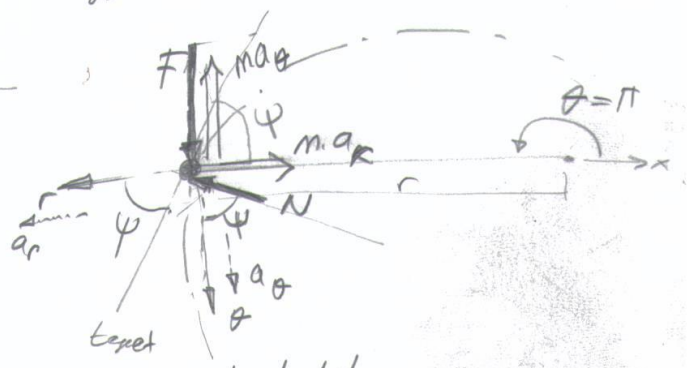
$F = -0,353 \ N.$

(7)

Örnek 3 Şekildeki gibi 0,5 kg lık bir cisim yatay olarak duran bir kanal içerisinde sürtünmesiz olarak hareket etmektedir. Kanalın şekli $r = 0{,}1\,\theta$ (m) ifadesiyle θ (rad) açısına bağlı olarak verilmiştir. OA kolu $\dot{\theta} = 4$ rad/s lik sabit dönüş hızına göre $\theta = \pi$ radyan olduğu anda kolun kutuya uyguladığı kuvveti bulunuz.



Cisme uygulan F kuvveti çubuğa dik doğrultudadır. Yani θ ekseni yönündedir. Kanalın cisme uyguladığı kuvvetine teğete dik yönündedir.



Önce teğet doğrultunun açısını bulalım.

$$\tan\psi = \frac{r}{\frac{dr}{d\theta}} = \frac{0{,}1 \cdot \theta = \pi}{0{,}1} = \pi = 3.14 \Rightarrow \psi = 72{,}34^\circ$$

Hareket Denklemleri

$$+\leftarrow \sum F_r = m \cdot a_r \qquad N \cdot \operatorname{Sen}\psi - m \cdot a_r = 0.$$

$$N \cdot \operatorname{Sen} 72{,}34 - 0{,}5 \cdot a_r = 0$$

$$+\downarrow \sum F_\theta = m \cdot a_\theta \qquad -N \cdot \operatorname{Cos}\psi + F - m\,a_\theta = 0.$$

$$-N \cdot \operatorname{Cos} 72{,}34 + F - 0{,}5 \cdot a_\theta = 0.$$

2 denklem ve 4 bilinmeyen var (N, F, a_r, a_θ).

İvmeleri Formüllerden bulalım.

$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ | $a_\theta = r\cdot\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$ (8)

değişken

$r = 0{,}1\,\theta$

$r = 0{,}1 \cdot 3{,}14 = 0{,}314\,m.$

$\theta = \pi = 3{,}14$ rad.

$\dot{r} = 0{,}1 \cdot \dot{\theta}$ (dem)

$= 0{,}1 \cdot 4$

$\dot{\theta} = 4$ rad/s.

$\dot{r} = 0{,}4\ m/s$

$\ddot{\theta} = 0.$

$\ddot{r} = 0{,}1 \cdot \ddot{\theta} = 0$

$\dot{\theta} = 4$ rad/s sabit hız olarak verilmiş. dolayısıyla

$\ddot{\theta} = 0.$

$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$

$= 0 - 0{,}314\,m \cdot 4^2$

$a_r = -5{,}024\ m/s^2$

$a_\theta = r\cdot\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$

$= 0{,}314 \cdot 0 + 2 \cdot 0{,}4 \cdot 4$

$a_\theta = 3{,}20\ m/s^2$

Hareket denklemlerinde yerine yazalım

$+N \cdot \sin 72{,}34 = 0{,}5 \cdot (-5{,}024)$ ($\cos 72{,}34$)

$+F - N \cdot \cos 72{,}34 = 0{,}5 \cdot (3{,}20)$ ($\sin 72{,}34$)

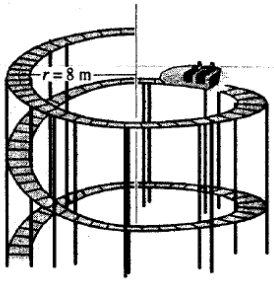
$+F = +0{,}5 \cdot 5{,}024 \cdot \cos 72{,}34 + 0{,}5 \cdot 3{,}20 \cdot \sin 72{,}34$ (+0,762, +1,524)

$\sin 72{,}34$

$F = +0{,}799\ N$

Örnek 4

13-99. For a short time, the 250-kg roller coaster car is traveling along the spiral track such that its position measured from the top of the track has components $r = 8$ m, $\theta = (0.1t + 0.5)$ rad, and $z = (-0.2t)$ m, where t is in seconds. Determine the magnitudes of the components of force which the track exerts on the car in the r, θ, and z directions at the instant $t = 2$ s. Neglect the size of the car.



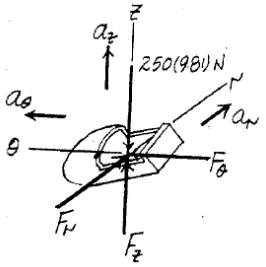
Kinematic : Here, $r = 8$ m, $\dot{r} = \ddot{r} = 0$. Taking the required time derivatives at $t = 2$ s, we have

$$\theta = 0.1t + 0.5\big|_{t=2s} = 0.700 \text{ rad} \quad \dot{\theta} = 0.100 \text{ rad/s} \quad \ddot{\theta} = 0$$

$$z = -0.2t\big|_{t=2s} = -0.400 \text{ m} \quad \dot{z} = -0.200 \text{ m/s} \quad \ddot{z} = 0$$

Applying Eqs. 12–29, we have

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0 - 8\left(0.100^2\right) = -0.0800 \text{ m/s}^2$$
$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 8(0) + 2(0)(0.200) = 0$$
$$a_z = \ddot{z} = 0$$



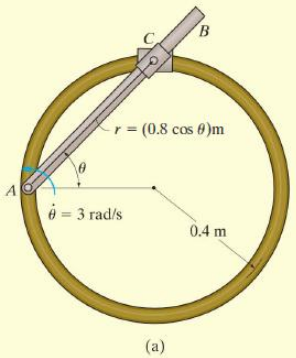
Equation of Motion :

$$\Sigma F_r = ma_r; \quad F_r = 250(-0.0800) = -20.0 \text{ N} \quad \textbf{Ans}$$

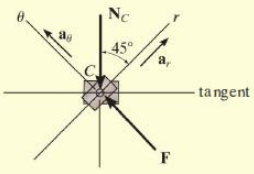
$$\Sigma F_\theta = ma_\theta; \quad F_\theta = 250(0) = 0 \quad \textbf{Ans}$$

$$\Sigma F_z = ma_z; \quad F_z - 250(9.81) = 250(0)$$
$$F_z = 2452.5 \text{ N} = 2.45 \text{ kN} \quad \textbf{Ans}$$

Örnek 5



(a)



(b)

The smooth 0.5-kg double-collar in Fig. 13–19*a* can freely slide on arm AB and the circular guide rod. If the arm rotates with a constant angular velocity of $\dot{\theta} = 3$ rad/s, determine the force the arm exerts on the collar at the instant $\theta = 45°$. Motion is in the horizontal plane.

SOLUTION

Free-Body Diagram. The normal reaction $\mathbf{N}_C$ of the circular guide rod and the force $\mathbf{F}$ of arm AB act on the collar in the plane of motion, Fig. 13–19*b*. Note that $\mathbf{F}$ acts perpendicular to the axis of arm AB, that is, in the direction of the θ axis, while $\mathbf{N}_C$ acts perpendicular to the tangent of the circular path at $\theta = 45°$. The four unknowns are N_C, F, a_r, a_θ.

Equations of Motion.

$$+\nearrow \Sigma F_r = ma_r; \qquad -N_C \cos 45° = (0.5 \text{ kg})\, a_r \qquad (1)$$

$$+\nwarrow \Sigma F_\theta = ma_\theta; \qquad F - N_C \sin 45° = (0.5 \text{ kg})\, a_\theta \qquad (2)$$

Kinematics. Using the chain rule (see Appendix C), the first and second time derivatives of r when $\theta = 45°$, $\dot{\theta} = 3$ rad/s, $\ddot{\theta} = 0$, are

$$r = 0.8 \cos\theta = 0.8 \cos 45° = 0.5657 \text{ m}$$

Fig. 13–19

$$\dot{r} = -0.8 \sin\theta\,\dot{\theta} = -0.8 \sin 45°(3) = -1.6971 \text{ m/s}$$

$$\ddot{r} = -0.8\left[\sin\theta\,\ddot{\theta} + \cos\theta\,\dot{\theta}^2\right]$$

$$= -0.8[\sin 45°(0) + \cos 45°(3^2)] = -5.091 \text{ m/s}^2$$

We have

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -5.091 \text{ m/s}^2 - (0.5657 \text{ m})(3 \text{ rad/s})^2 = -10.18 \text{ m/s}^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = (0.5657 \text{ m})(0) + 2(-1.6971 \text{ m/s})(3 \text{ rad/s})$$

$$= -10.18 \text{ m/s}^2$$

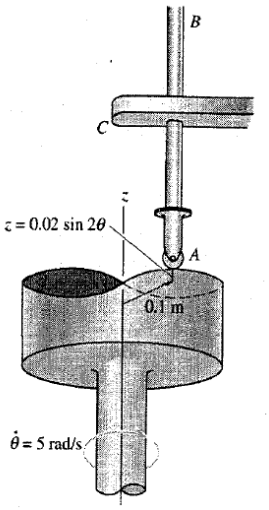
Substituting these results into Eqs. (1) and (2) and solving, we get

$$N_C = 7.20 \text{ N}$$

$$F = 0 \qquad \textit{Ans.}$$

Örnek 6

13-87. The 2-kg rod AB moves up and down as its end slides on the smooth contoured surface of the cam, where $r = 0.1$ m and $z = (0.02 \sin 2\theta)$ m. If the cam is rotating at a constant rate of 5 rad/s, determine the maximum and minimum force the cam exerts on the rod.



Kinematic: Taking the required time derivatives, we have

$\dot{\theta} = 5$ rad/s $\quad \ddot{\theta} = 0$

$z = 0.02 \sin 2\theta \quad \dot{z} = 0.04 \cos 2\theta\dot{\theta} \quad \ddot{z} = 0.04(\cos 2\theta\ddot{\theta} - 2 \sin 2\theta\dot{\theta}^2)$

Thus,

$a_z = \ddot{z} = 0.04[\cos 2\theta(0) - 2 \sin 2\theta(5^2)] = -2 \sin 2\theta$

At $\theta = 45°$, $\quad a_z = -2 \sin 90° = -2$ m/s^2

At $\theta = -45°$, $\quad a_z = -2 \sin(-90°) = 2$ m/s^2

Equation of Motion: At $\theta = 45°$, applying Eq. 13-9, we have

$\sum F_z = ma_z; \quad (F_z)_{\min} - 2(9.81) = 2(-2)$

$(F_z)_{\min} = 15.6$ N **Ans**

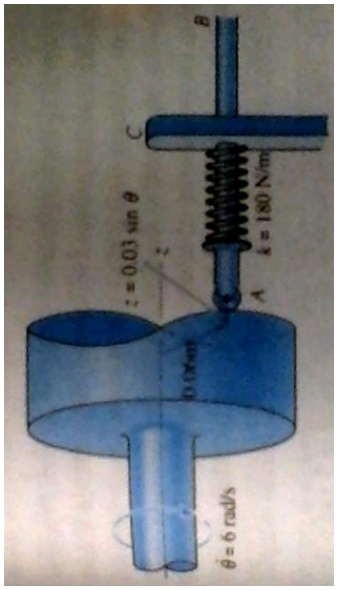
At $\theta = -45°$, we have

$\sum F_z = ma_z; \quad (F_z)_{\max} - 2(9.81) = 2(2)$

$(F_z)_{\max} = 23.6$ N **Ans**

Aynı soruyu şunun için çözün

13–90. 3.75 N'luk bir ağırlığa sahip AB yaylı kolu, ucu $r = 0.06$ m ve $z = (0.03 \sin \theta)$ m ile tanımlı mil yüzeyi üzerinde dönerken, geriye ve ileriye doğru hareket etmektedir. Mil 6 rad/s lik bir hızla döndüğüne göre, yay $\theta = 90°$ olduğunda 0.06 m sıkıştırılıyorsa, kolun mil üzerine etkidiği maksimum ve minimum kuvveti belirleyiniz.



Cevap (21.2 N, 11.2 N)