DİNAMİK (6.hafta)

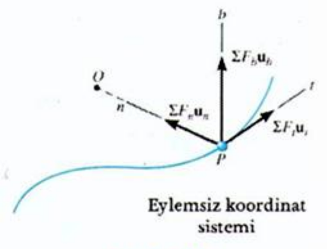
EĞRİSEL HAREKETTE KUVVET VE İVME

Bir parçacık, bilinen bir eğrisel yörünge üzerinde hareket ettiğinde, hareket denklemleri normal ve teğet doğrultularda yazılabilir:

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$
$$\Sigma F_t \mathbf{u}_t + \Sigma F_n \mathbf{u}_n + \Sigma F_b \mathbf{u}_b = m\mathbf{a}_t + m\mathbf{a}_n$$

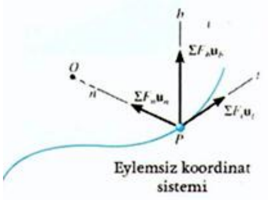
Burada, ΣF_n, ΣF_t ve ΣF_b, sırasıyla, normal, teğet ve binormal doğrultularda parçacık üzerine etkiyen bütün kuvvet bileşenlerinin toplamını gösterir, Şekil 13–11. Parçacık yörünge boyunca harekete zorlandığından, parçacığın binormal doğrultuda herhangi bir hareketi olmadığına dikkat edelim. Yukarıdaki denklem,

$$\Sigma F_t = ma_t$$
$$\Sigma F_n = ma_n \qquad (13\text{–}8)$$
$$\Sigma F_b = 0$$



Şekil 13–11

koşuluyla sağlanır. a_t $(= dv/dt)$'nin zamana göre, hızın büyüklüğündeki değişim hızını gösterdiği unutulmamalıdır. Sonuç olarak, $\Sigma \mathbf{F}_t$ hareket doğrultusunda etkirse, parçacığın hızı artacak, zıt doğrultuda etkirse azalacaktır. Aynı şekilde, a_n $(= v^2/\rho)$, hızın doğrultusundaki zamana göre değişim hızını gösterir. Bu vektör daima pozitif n doğrultusunda, yani, yörüngenin eğrilik merkezine doğru etkidiğinden, $\mathbf{a}_n$'ye neden olan, $\Sigma \mathbf{F}_n$ de bu doğrultuda etkir. Özellikle, parçacık sabit bir hızla dairesel bir yörüngede harekete zorlandığında, bu zorlama dolayısıyla parçacık üzerinde bir normal kuvvet vardır. Bu kuvvet, daima yörüngenin eğrilik merkezine doğru yönlenmiş olduğundan, *merkezcil kuvvet* olarak adlandırılır.



Şekil 13–11*(tekrar)*

ANALİZDE İZLENECEK YOL

Bir problem, bir parçacığın *bilinen bir eğrisel yörünge* üzerindeki hareketi ile ilgili olduğu zaman, ivme bileşenleri kolayca formüle edilebildiğinden, analiz için normal ve teğetsel koordinatlar kullanılmalıdır. Kuvvetlerle ivme arasındaki ilişkiyi kuran hareket denklemlerinin uygulanması yöntemi Kesim 13.4.'te verilen prosedürle açıklandı. Özellikle, n, t, b koordinatları için yöntem aşağıdaki gibi ifade edilmelidir:

Serbest-Cisim Diyagramı. n, t, b eylemsiz koordinat sistemi parçacığın üzerinde oluşturulur ve parçacığın serbest-cisim diyagramı çizilir. Parçacığın $\mathbf{a}_n$ normal ivmesi *daima* pozitif n yönündedir. $\mathbf{a}_t$ teğetsel ivmesi bilinmiyorsa, bunun pozitif t doğrultusunda etkidiği varsayılır. Problemdeki bilinmeyenler diyagramda işaretlenir.

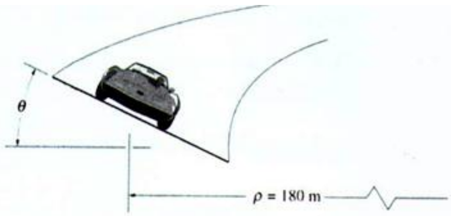
Hareket Denklemleri. Denklem 13–8 hareket denklemi uygulanır.

Kinematik. İvmenin teğetsel ve normal bileşenleri, yani, $a_t = dv/dt$ veya $a_t = v\,dv/ds$ ve $a_n = v^2/\rho$ formüle edilir. Yörünge $y = f(x)$ olarak tanımlanıyorsa, parçacığın bulunduğu noktadaki eğrilik yarıçapı $\rho = |[1 + (dy/dx)]^{3/2} / (d^2y/dx^2)|$'den bulunabilir.

Aşağıdaki örnekler bu prosedürün sayısal uygulamalarını açıklamaktadır.

Örnek 1

Şekil 13–12*a*'da gösterilen spor arabanın tekerleklerinin, arabanın eğri boyunca yukarı veya aşağı kaymasını önlemek üzere sürtünmeye bağımlı olmaması için dairesel yolun θ eğiminin ne olması gerektiğini belirleyiniz. 30 m/s'lik sabit bir hızla hareket eden arabanın boyutları ihmal edilecektir. Yolun yarıçapı 180 m'dir.



(a)

Şekil 13–12

ÇÖZÜM

Problemin çözümüne bakmadan önce, problemin niçin n, t, b koordinatları kullanılarak çözülmesi gerektiğini düşününüz.

Serbest-Cisim Diyagramı. Şekil 13–12*b*'de gösterildiği gibi, arabanın bir m kütlesine sahip olduğu varsayılıyor. Problemde ifade edildiği gibi, araba üzerine herhangi bir sürtünme kuvveti etkimemektedir. Burada, $\mathbf{N}_C$ yerden tekerleklere gelen *bileşke* kuvveti göstermektedir. a_n hesaplanabildiğinden, bilinmeyenler N_C ve θ'dır.

Hareket denklemleri. Şekilde gösterilen n, b eksenlerini kullanarak

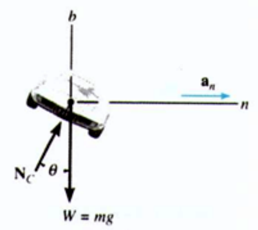
$$+\uparrow \Sigma F_b = 0; \qquad N_C \cos\theta - mg = 0 \qquad (1)$$
$$\xrightarrow{+} \Sigma F_n = ma_n \qquad N_C \sin\theta = m\frac{v^2}{\rho} \qquad (2)$$

buluruz. Denklem 2 Denklem 1 ile bölünerek N_C ve m yok edilir ve

$$\tan\theta = \frac{v^2}{g\rho} = \frac{(30)^2}{9.81(180)}$$
$$\theta = \tan^{-1}(0.510)$$
$$= 27.0° \qquad \textit{Yanıt}$$

bulunur.

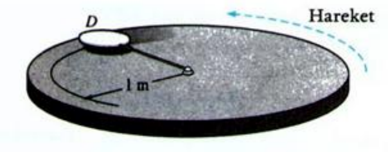
Hareketin teğetsel doğrultusundaki toplam kuvvetin çözüme bir etkisi yoktur. Bu kuvvet göz önüne alınırsa, $a_t = dv/dt = 0$ olduğuna dikkat edilmelidir, çünkü araba *sabit hızla* hareket etmektedir. Bu problemin daha detaylı analizi Prob. 21–59'da yapılmıştır.



(b)

Örnek 2

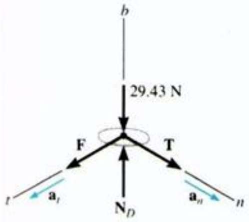
3 kg'lık D diski, Şekil 13–3a'da gösterildiği gibi, bir ipin ucuna bağlanıyor. İpin diğer ucu, bir platformun merkezindeki mafsala bağlanıyor. Platform hızlı bir şekilde dönüyor ve disk durağan haldeyken platform üzerine bırakılıyorsa, diskin ipi koparacak hıza ulaşması için gerekli süreyi belirleyiniz. İpin dayanabileceği maksimum çekme kuvveti 100 N'dur ve disk ve platform arasındaki kinetik sürtünme katsayısı $\mu_k = 0.1$'dir.



(a)

ÇÖZÜM

Serbest-Cisim Diyagramı. Şekil 13–13b'de gösterildiği gibi, disk, dengelenmemiş **T** ve **F** kuvvetlerinin bir sonucu olarak, normal ve teğetsel ivme bileşenlerine sahiptir. Kayma ortaya çıktığından, sürtünme kuvveti $F = \mu_k N_D = 0.1N_D$ büyüklüğüne sahiptir ve yönü diskin platforma göre *bağıl hareketine* karşı koyacak şekildedir. İp, diskin n doğrultusundaki hareketini kısıtlar ve bu yüzden **F** pozitif t doğrultusunda etki eder. Diskin ağırlığı $W = 3(9.81) = 29.43$ N'dur. a_n ve v arasında bir ilişki kurulabildiğinden ve maksimum hızda $T = 100$ N olduğundan, bilinmeyenler N_D, a_t ve v'dir.



(b)

Şekil 13–13

Hareket Denklemleri.

$$\Sigma F_b = 0; \qquad N_D - 29.43 = 0 \qquad (1)$$
$$\Sigma F_t = ma_t; \qquad 0.1N_D = 3a_t \qquad (2)$$
$$\Sigma F_n = ma_n \qquad T = 3\left(\frac{v^2}{1}\right) \qquad (3)$$

dir. $T = 100$ N yazılarak, diskin ipi koparmak için gerekli v_{cr} kritik hızı Denklem 3'den çözülebilir. Bütün denklemleri çözerek

$$N_D = 29.43 \text{ N}$$
$$a_t = 0.981 \text{ m/s}^2$$
$$v_{cr} = 5.77 \text{ m/s}$$

yi elde ederiz.

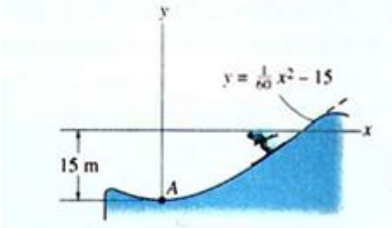
Kinematik. a_t *sabit* olduğundan, ipin kopması için gerekli süre

$$v_{cr} = v_0 + a_t t$$
$$5.77 = 0 + (0.981)t$$
$$t = 5.89 \text{ s}$$

olarak bulunur.

Örnek 3

Şekil 13–14a'daki kayakçı, yaklaşık olarak bir parabol şeklinde olan pürüzsüz bir eğimli yoldan aşağıya inmektedir. Kayakçının ağırlığı 600 N ve A noktasına ulaştığı andaki hızı 9 m/s olduğuna göre, bu anda yere uyguladığı normal kuvveti belirleyiniz. Ayrıca, A'daki ivmesini belirleyiniz.

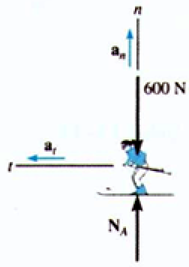


(a)

ÇÖZÜM

Problemi çözmek için, niçin n, t koordinatlarını kullanmayı düşünürüz?

Serbest-Cisim Diyagramı. Kayakçının A'da bulunduğu andaki serbest-cisim diyagramı Şekil 13–14b'de gösterilmektedir. Yörünge *eğri* olduğundan, iki ivme bileşeni vardır: $\mathbf{a}_n$ ve $\mathbf{a}_t$. a_n hesaplanabildiğinden, bilinmeyenler a_t ve N_A'dır.



(b)

Şekil 13–14

Hareket Denklemleri.

$$+\uparrow \Sigma F_n = ma_n; \qquad N_A - 600 = \frac{600}{9.81}3\left(\frac{(9)^2}{\rho}\right) \qquad (1)$$
$$\overset{+}{\leftarrow} \Sigma F_t = ma_t; \qquad 0 = \frac{600}{9.81}a_t \qquad (2)$$

dir.

Yörüngenin ρ eğrilik yarıçapı $A(0, -15$ m) noktasında hesaplanmalıdır. Burada, $y = \frac{1}{60}x^2 - 15$, $dy/dx = \frac{1}{30}x$, $d^2y/dx^2 = \frac{1}{30}$'dur ve dolayısıyla $x = 0$'da

$$\rho = \left|\frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{d^2y/dx^2}\right|_{x=0} = \left|\frac{[1 + (0)^2]^{3/2}}{\frac{1}{30}}\right| = 30 \text{ m}$$

dir. Bunu Denklem 1'e yerleştirir ve buradan N_A'yı çözersek

$$N_A = 765 \text{ N} \qquad \textit{Yanıt}$$

buluruz.

Kinematik. Denklem 2'den

$$a_t = 0$$

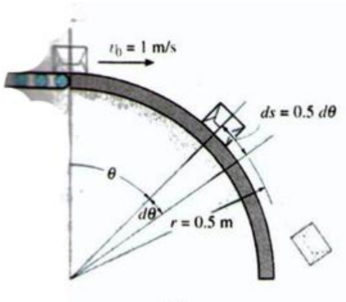
bulunur. Böylece,

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(9)^2}{30} = 2.7 \text{ m/s}^2$$
$$a_A = a_n = 2.7 \text{ m/s}^2 \uparrow \qquad \textit{Yanıt}$$

elde edilir.

Örnek 4

Her biri 2 kg'lık kütleye sahip paketler, Şekil 13–15a'da gösterildiği gibi, bir taşıyıcı banttan, $v_0 = 1$ m/s hızıyla pürüzsüz bir dairesel rampaya aktarılıyor. Rampanın yarıçapı 0.5 m olduğuna göre, her bir paketin yüzeyi terk etmeye başladığı andaki $\theta = \theta_{maks}$ açısını belirleyiniz.



(a)

ÇÖZÜM

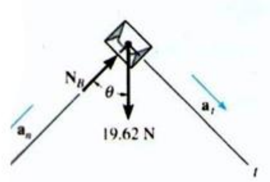
Serbest-Cisim Diyagramı. Her bir paketin θ *genel konumunda* bulunduğu andaki serbest-cisim diyagramı Şekil 13–15*b*'de gösterilmiştir. Her bir paket bir $\mathbf{a}_t$ teğetsel ivmesine sahip olmalıdır, çünkü, aşağı doğru kayarken, *hızı* daima *artmaktadır*. Ağırlığı $W = 2(9.81) = 19.62$ N'dur. Üç bilinmeyeni belirleyiniz.

Hareket Denklemleri.

$+\swarrow \Sigma F_n = ma_n \qquad -N_B + 19.62 \cos\theta = 2\,\dfrac{v^2}{0.5} \qquad (1)$

$+\searrow \Sigma F_t = ma_t \qquad 19.62 \sin\theta = 2a_t \qquad (2)$

dir. $\theta = \theta_{maks}$ olduğu anda paket rampa yüzeyini terk etmektedir, dolayısıyla $N_B = 0$'dır. O halde, üç bilinmeyen v, a_t ve θ'dır.



(b)

Şekil 13–15

Kinematik. Çözüm için gerekli üçüncü denklem, a_t teğetsel ivmesi ile paketin v hızı ve θ açısı arasında bir ilişki kurulabileceğine dikkat ederek bulunabilir. $a_t\, ds = v\, dv$ ve $ds = r\, d\theta = 0.5\, d\theta$, Şekil 13–15 a, olduğundan

$$a_t = \frac{v\, dv}{0.5\, d\theta}$$

bulunur. Çözüm için, Denklem 2'yi Denklem 3'te kullanır ve bulunan denklemi değişkenlerine ayırırız. Sonuçta

$$v\, dv = 4.905 \sin\theta\, d\theta$$

olur. $\theta = 0°$ iken $v_0 = 1$ m/s olduğuna dikkat ederek her iki yanın integralini alırsak

$$\int_1^v v\, dv = 4.905 \int_{0°}^{\theta} \sin\theta\, d\theta$$

$$\left.\frac{v^2}{2}\right|_1^v = -4.905 \cos\theta \Big|_{0°}^{\theta}$$

$$v^2 = 9.81(1 - \cos\theta) + 1$$

buluruz. Bunu ve $N_B = 0$ eşitliğini Denklem 1'de kullanarak, $\cos\theta_{maks}$ için çözdüğümüzde

$$19.62 \cos\theta_{maks} = \frac{2}{0.5}\,[9.81(1 - \cos\theta_{maks}) + 1]$$

$$\cos\theta_{maks} = \frac{43.24}{58.86};$$

$$\theta_{maks} = 42.7° \qquad \textit{Yanıt}$$

elde ederiz.