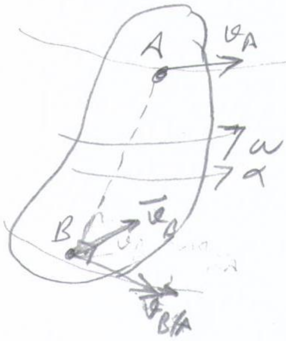
DİNAMİK (11.hafta)

1

BAĞIL HAREKET ANALİZİ – İVME

Genel düzlemsel hareket yapan bir cisimde (Hem öteleşen hem dönen cisim) cisim üzerinde referans alınan bir nokta vardı (A noktası). Cismin bu nokta etrafında döndüğünü varsaydığımızda B noktasının hızını veren denklem



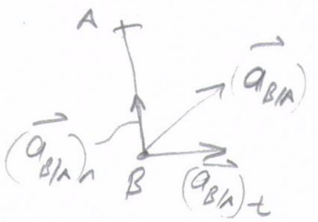
$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}$$

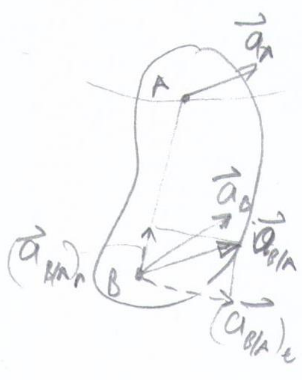
idi. Bu denklemde $\vec{v}_A$ A nın dışarıdaki bir mutlak eksene göre hız vektörü, $\vec{v}_{B/A}$ ise A noktasına göre B nin hız vektörünü göstermekte.

Yani A noktası etrafında B noktası dönerken oluşan hız vektörüdür. Bu da dairesel hareketteki çevresel hıza karşılık gelir.

Buradaki hız vektörlerinin zamana göre birkez daha türevinin alınması bize ivme vektörünü verecektir.

$$\frac{\partial \vec{v}_B}{\partial t} = \frac{\partial \vec{v}_A}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}_{B/A}}{\partial t}$$





$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$$

$$\underbrace{\vec{a}_B}_{\text{B noktasının mutlak eksene göre ivmesi}} = \underbrace{\vec{a}_A}_{\text{A noktasının mutlak eksene göre ivmesi}} + \underbrace{(\vec{a}_{B/A})_t}_{\text{B noktasının A etrafında dönerken oluşan teğetsel ivmesi}} + \underbrace{(\vec{a}_{B/A})_n}_{\text{B noktasının A etrafında dönerken oluşan normal ivme.}}$$

vektörel çarpım

vektör değil

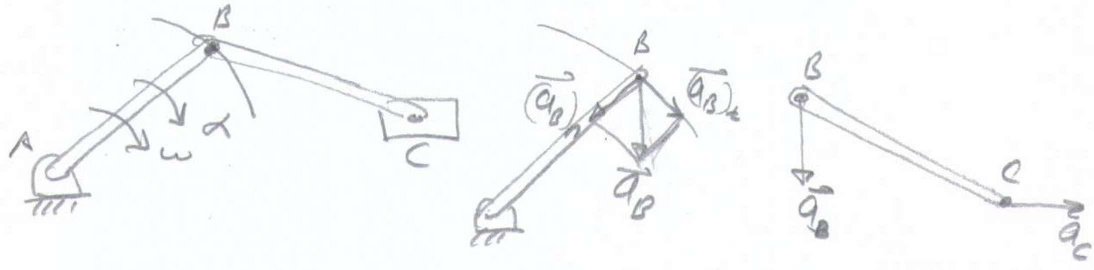
$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \underbrace{\vec{\alpha} \times \vec{r}_{B/A}}_{(\vec{a}_{B/A})_t} - \underbrace{\omega^2 \cdot \vec{r}_{BA}}_{(\vec{a}_{B/A})_n}$$

skaler

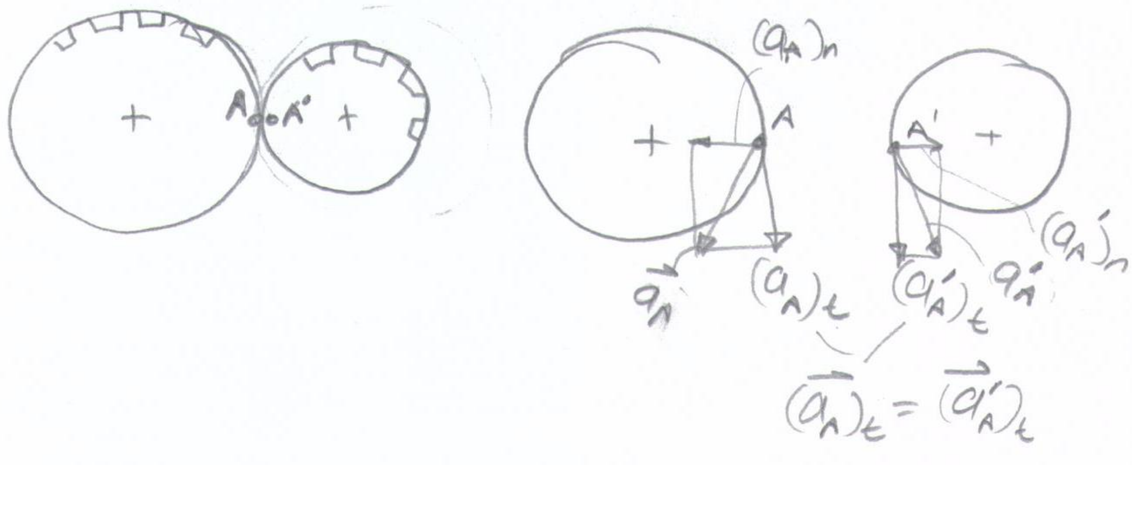
neden (-) olduğu için polar koordinatlara bak

2

Buna göre birbirine bağlı çubukların uçları aynı yörüngeyi takip ettiğine göre ivmeleri aynıdır.

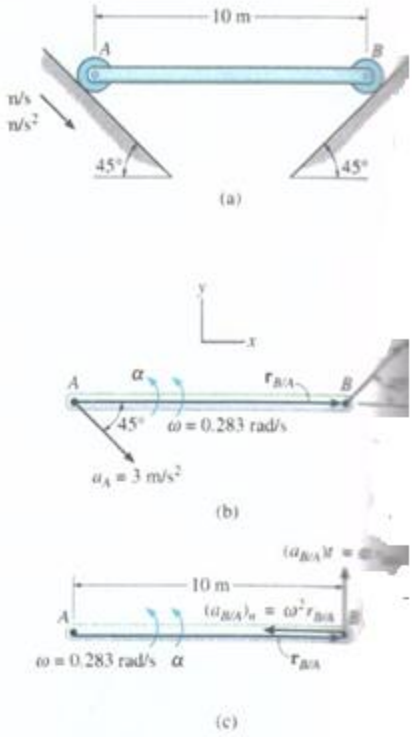


İki cisim kayma olmaksızın temas ediyor ve üzerindeki noktalar farklı yörüngeler çizerse bu cisimlerin üzerindeki noktaların teğetsel ivmeleri aynıdır fakat normal ivmeleri farklıdır. Dolayısıyla ivme vektörlerde farklıdır.



Örnek1 1

Şekil 16–26*a*'da gösterilen *AB* çubuğu, *A* ve *B*'deki eğik düzlemler boyunca hareket edebilmektedir. *A* noktası, çubuk yatay konumda bulunduğu anda her ikisi de aşağı doğru yönlenmiş, 3 m/s²'lik bir ivmeye ve 2 m/s'lik bir hıza sahip olduğuna göre, çubuğun bu andaki açısal ivmesini belirleyiniz.



Şekil 16–26

ÇÖZÜM I *(VEKTÖREL ANALİZ)*

Çubuk üzerindeki *A* ve *B* noktalarına ivme denklemini uygulayacağız. Bunu yapabilmek için, önce çubuğun açısal hızını belirlemek gerekecektir. Hız denklemini veya anlık merkezler yöntemini kullanarak $\omega = 0.283$ rad/s ???? olduğunu gösteriniz.

Kinematik Diyagram. Şekil 16–26*b*'de *x*, *y* eksenleri çizilmiştir. *A* ve *B* noktaları doğru şeklindeki yörüngeler boyunca hareket ettiklerinden, yörüngelere dik ivme bileşenleri mevcut değildir. Şekil 16–26*b*'de iki bilinmeyen vardır: a_B ve α

İvme Denklemi. Çubuk üzerindeki *A* ve *B* noktalarına Denklem 16–18'*i* uygular ve her bir vektörü kartezyen vektör formunda ifade edersek

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} - \omega^2 \mathbf{r}_{B/A}$$

$$a_B \cos 45°\mathbf{i} + a_B \sin 45°\mathbf{j} = 3 \cos 45°\mathbf{i} - 3 \sin 45°\mathbf{j} + (\alpha\mathbf{k}) \times (10\mathbf{i})$$

buluruz. Vektörel çarpım işlemi yapılır ve **i** ve **j** bileşenleri eşitlenirse

$$a_B \cos 45° = 3 \cos 45° - (0.283)^2(10) \qquad (1)$$

$$a_B \sin 45° = -3 \sin 45° + \alpha(10) \qquad (2)$$

bulunur. Bu denklemlerin çözümünden

$$a_B = 1.87 \text{ m/s}^2 \; \nearrow^{45°}$$

$$\alpha = 0.344 \text{ rad/s}^2 \; \circlearrowleft \qquad \textit{Yanıt}$$

elde edilir.

ÇÖZÜM II *(SKALER BİLEŞENLER)*

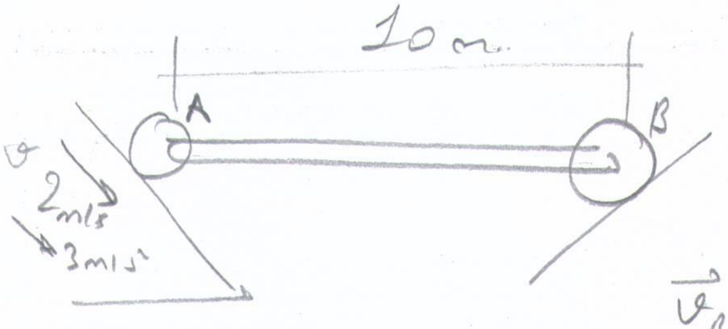
İkinci bir prosedür olarak, skaler bileşen denklemler doğrudan elde edilebilir. $(\mathbf{a}_{B/A})_t$ ve $(\mathbf{a}_{B/A})_n$ bağıl ivme bileşenlerini gösteren kinematik diyagramdan

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + (\mathbf{a}_{B/A})_t + (\mathbf{a}_{B/A})_n$$

$$\begin{bmatrix} a_B \\ \nearrow^{45°} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \text{ m/s}^2 \\ \searrow^{45°} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha(10 \text{ m}) \\ \uparrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (0.283 \text{ rad/s})^2(10 \text{ m}) \\ \leftarrow \end{bmatrix}$$

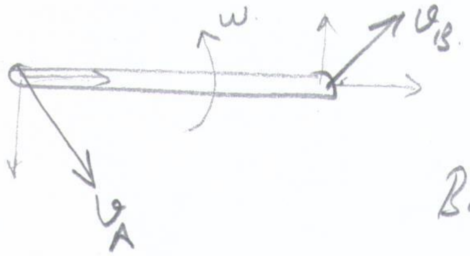
bulunur. *x* ve *y* bileşenlerini eşitleyerek Denklem 1 ve 2'yi ve önceki sonucu elde ederiz.

Sorunun Açık Çözümü



$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}$$

Hız denklemi ve hızları bulalım $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}$



Bunu vektörler cinsinden yazalım

$$(v_B)_x \cdot \vec{i} + (v_B)_y \vec{j} = (v_A)_x \cdot \vec{i} - (v_A)_y \vec{j} + \omega \cdot \vec{k} \times (r_{BA} \vec{i})$$

$$(v_B)_x \vec{i} + (v_B)_y \vec{j} = 1,414 \cdot \vec{i} - 1,414 \vec{j} + \omega \cdot 10 \cdot (\vec{k} \times \vec{i})$$

$$(v_B)_x \vec{i} + (v_B)_y \vec{j} = 1,414 \vec{i} - 1,414 \vec{j} + \omega \cdot 10 \cdot \vec{j}$$

$$(v_B)_x \vec{i} + (v_B)_y \vec{j} - 1,414 \vec{i} + 1,414 \vec{j} - 10 \cdot \omega \vec{j} = 0$$

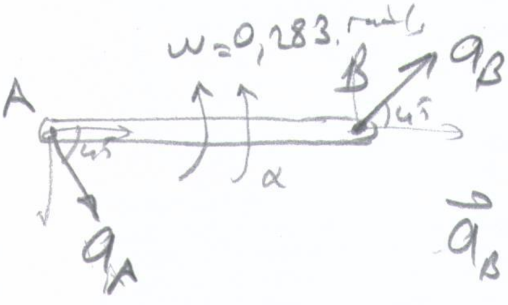
$$[(v_B)_x - 1,414]\, \vec{i} + [(v_B)_y + 1,414 - 10 \cdot \omega]\, \vec{j} = 0$$

$(v_B)_x - 1,414 = 0$ $\qquad$ $(v_B)_y + 1,414 - 10 \cdot \omega = 0$

$v_{Bx} = 1,414$ m/s $= (v_B)_y$ $\qquad$ $1,414 + 1,414 - 10 \cdot \omega = 0$

$|v_B| = 1.681$ m/s $\qquad$ $\omega = 0,283$ rad/s

İvme Denklemi ve ivmeleri bulalım



$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \left[(\vec{a}_{B/A})_t + (\vec{a}_{B/A})_n\right]$$

$$\left.\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{B/A} - \omega^2 \cdot \vec{r}_{B/A}\right\}$$ Esas denklem budur.

Kartezyen bileşen vektörler cinsinden yazalım

A ve B noktaları düz yörüngede sınırlanmıştır.

$$(a_B)_x \vec{i} + (a_B)_y \vec{j} = (a_A)_x \vec{i} - (a_A)_y \vec{j} +$$

$$\alpha_{AB} \cdot \vec{k} \times (\underbrace{r_{B/A}}_{10\,m} \cdot \vec{i}) - \omega^2 \cdot r_{B/A} \cdot \vec{i}$$

$r_{B/A}$ yatay

$$\_\_\_ + \_\_\_ = 3 \cdot \cos 45 \cdot \vec{i} - 3 \cdot \sin 45 \cdot \vec{j}$$

$$+ \alpha_{AB} \cdot 10 \cdot \underbrace{(\vec{k} \times \vec{i})}_{+\vec{j}} - 0{,}283^2 \cdot 10 \cdot \vec{i}$$

$$(a_B)_x \vec{i} + (a_B)_y \vec{j} - 2{,}121 \vec{i} + 2{,}121 \vec{j} - \alpha_{AB} \cdot 10 \cdot \vec{j}$$
$$+ 0{,}283^2 \cdot 10 \cdot \vec{i} = 0.$$

$$\underbrace{\left[(a_B)_x - 2{,}121 + 0{,}8\right]}\vec{i} + \underbrace{\left[(a_B)_y + 2{,}121 - 10\,\alpha_{AB}\right]}\vec{j} =$$

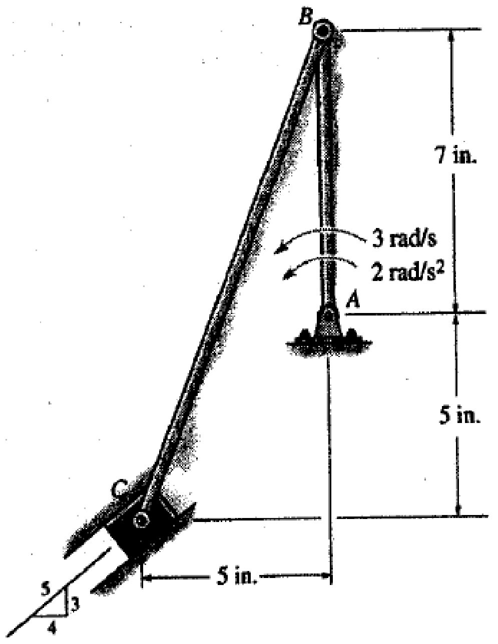
$$(a_B)_x = 1{,}321 = (a_B)_y \qquad \alpha_{AB} = 0{,}344 \text{ rad/s}^2$$

$$a_R = 1{,}868 \text{ m/s}^2$$

Bu soru II. yöntemle de ... hızlanma ve ... sayılabilir

Örnek 2

16-121. At the given instant member AB has the angular motions shown. Determine the velocity and acceleration of the slider block C at this instant.



Çözüm

$$v_B = 3(7) = 21 \text{ in./s} \leftarrow$$

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \omega \times \mathbf{r}_{C/B}$$

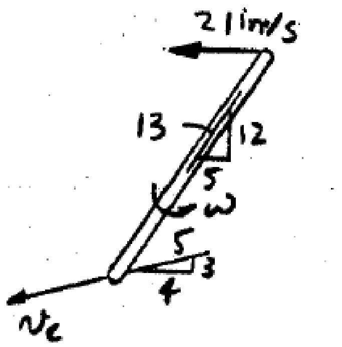
$$-v_C\left(\frac{4}{5}\right)\mathbf{i} - v_C\left(\frac{3}{5}\right)\mathbf{j} = -21\mathbf{i} + \omega\mathbf{k} \times (-5\mathbf{i} - 12\mathbf{j})$$

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad -0.8v_C = -21 + 12\omega$$

$$(+\uparrow) \qquad -0.6v_C = -5\omega$$

$$\omega = 1.125 \text{ rad/s}$$

$$v_C = 9.375 \text{ in./s} = 9.38 \text{ in./s} \quad \text{Ans}$$



$$(a_B)_n = (3)^2(7) = 63 \text{ in./s}^2 \downarrow$$

$$(a_B)_t = (2)(7) = 14 \text{ in./s}^2 \leftarrow$$

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_B + \alpha \times \mathbf{r}_{C/B} - \omega^2 \mathbf{r}_{C/B}$$

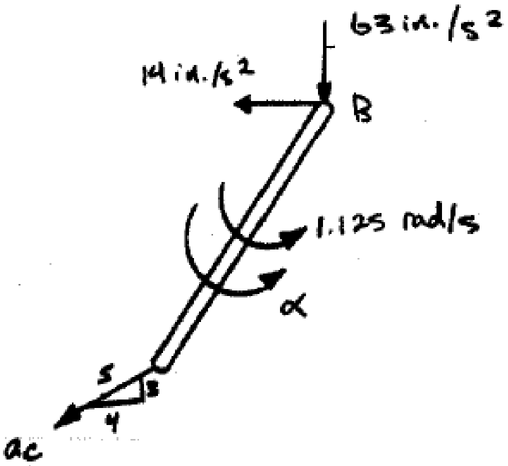
$$-a_C\left(\frac{4}{5}\right)\mathbf{i} - a_C\left(\frac{3}{5}\right)\mathbf{j} = -14\mathbf{i} - 63\mathbf{j} + (\alpha\mathbf{k}) \times (-5\mathbf{i} - 12\mathbf{j}) - (1.125)^2(-5\mathbf{i} - 12\mathbf{j})$$

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad -0.8a_C = -14 + 12\alpha + 6.328$$

$$(+\uparrow) \qquad -0.6a_C = -63 - 5\alpha + 15.1875$$

$$a_C = 54.7 \text{ in./s}^2 \quad \text{Ans}$$

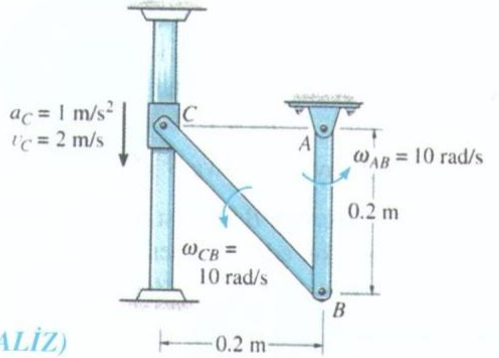
$$\alpha = -3.00 \text{ rad/s}^2$$



Örnek 3

Bu sorunun hız kısmı önceki hafta çözülmüştü. Onun devamı olarak çözülmelidir.

Şekil 16–30a'daki C bileziği 1 m/s²'lik bir ivmeyle aşağı doğru hareket etmektedir. Şekilde gösterilen anda, bilezik, CB ve AB bağlantılarına $\omega_{AB} = \omega_{CB} = 10$ rad/s açısal hız veren, 2 m/s'lik bir hıza sahiptir. (Bkz. Örnek 16–8.) CB ve AB'nin bu andaki açısal ivmelerini belirleyiniz.



ÇÖZÜM (VEKTÖREL ANALİZ)

Kinematik Diyagram. AB ve CB bağlantılarının kinematik diyagramları Şekil 16–30b'de gösterilmiştir. Çözüm için, her bir bağlantıya uygun kinematik denklemi uygulayacağız.

İvme Denklemi.

AB bağlantısı (sabit bir eksen etrafında dönme):

$$\mathbf{a}_B = \boldsymbol{\alpha}_{AB} \times \mathbf{r}_B - \omega_{AB}^2 \mathbf{r}_B$$

$$\mathbf{a}_B = (\alpha_{AB}\mathbf{k}) \times (-0.2\mathbf{j}) - (10)^2(-0.2\mathbf{j})$$

$$\mathbf{a}_B = 0.2\alpha_{AB}\mathbf{i} + 20\mathbf{j}$$

olur. AB bir *eğri yörünge* boyunca hareket ettiğinden, $\mathbf{a}_B$ iki bileşene sahiptir.

CB bağlantısı (genel düzlemsel hareket): Bulunan $\mathbf{a}_B$ değeri kullanılarak Denklem 16–18 uygulanırsa,

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_C + \boldsymbol{\alpha}_{CB} \times \mathbf{r}_{B/C} - \omega_{CB}^2 \mathbf{r}_{B/C}$$

$$0.2\alpha_{AB}\mathbf{i} + 20\mathbf{j} = -1\mathbf{j} + (\alpha_{CB}\mathbf{k}) \times (0.2\mathbf{i} - 0.2\mathbf{j}) - (10)^2(0.2\mathbf{i} - 0.2\mathbf{j})$$

$$0.2\alpha_{AB}\mathbf{i} + 20\mathbf{j} = -1\mathbf{j} + 0.2\alpha_{CB}\mathbf{j} + 0.2\alpha_{CB}\mathbf{i} - 0.2\mathbf{i} - 0.2\mathbf{j}$$

bulunur. Buradan

$$0.2\alpha_{AB} = 0.2\alpha_{CB} - 20$$

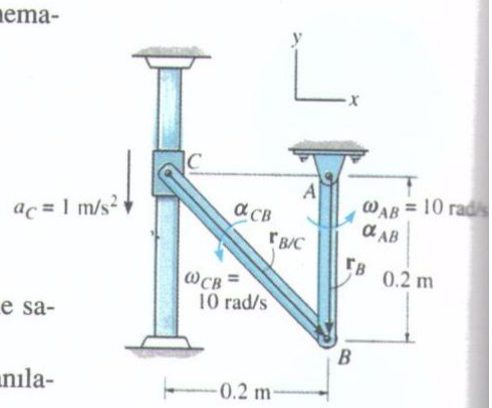
$$20 = -1 + 0.2\alpha_{CB} + 20$$

ve bunun çözümden

$$\alpha_{CB} = 5 \text{ rad/s}^2 \circlearrowleft \qquad \textit{Yanıt}$$

$$\alpha_{AB} = -95 \text{ rad/s}^2 = 95 \text{ rad/s}^2 \circlearrowright \qquad \textit{Yanıt}$$

elde edilir.



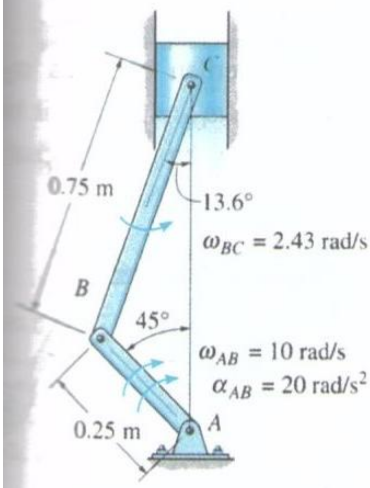
(b)

Şekil 16–30

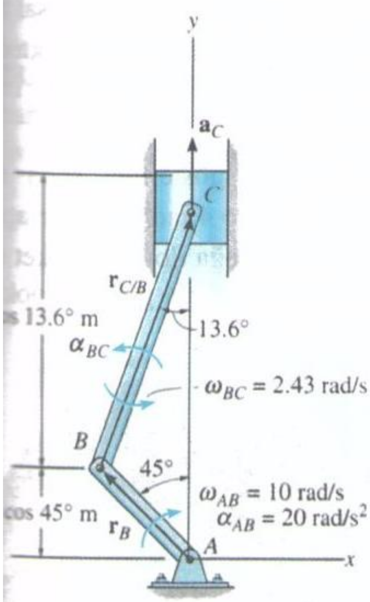
Örnek 4

Bu sorunun hız kısmı çözülmeden direk ivme kısmı çözülmüştür. Geçen haftanın konularına göre hız kısmını çözmek gerekir.

Bir motorun AB krank mili 20 rad/s²'lik bir açısal ivmeyle saat yönünde dönmektedir. Pistonun, AB'nin şekilde gösterilen konumda bulunduğu andaki ivmesini belirleyiniz. Bu anda $\omega_{AB} = 10$ rad/s ve $\omega_{BC} = 2.43$ rad/s'dir.



(a)



Şekil 16–31

ÇÖZÜM (VEKTÖREL ANALZ)

Kinematik Diyagram. AB ve BC için kinematik diyagramlar Şekil 16–31b'de gösterilmiştir. C doğru şeklindeki bir yörünge boyunca hareket ettiğinden, $\mathbf{a}_C$ düşeydir.

İvme Denklemi. Konum vektörlerinin her birini kartezyen vektör formunda ifade ederek,

$$\mathbf{r}_{B/A} = \{-0.25 \sin 45°\mathbf{i} + 0.25 \cos 45°\mathbf{j}\}\text{ m} = \{-0.177\mathbf{i} + 0.177\mathbf{j}\}\text{ m}$$

$$\mathbf{r}_{C/B} = \{-0.75 \sin 13.6°\mathbf{i} + 0.75 \cos 13.6°\mathbf{j}\}\text{ m} = \{-0.176\mathbf{i} + 0.729\mathbf{j}\}\text{ m}$$

buluruz.

AB krank mili çubuğu (sabit bir eksen etrafında dönme):

$$\mathbf{a}_B = \boldsymbol{\alpha}_{AB} \times \mathbf{r}_{B/A} - \omega_{AB}^2\mathbf{r}_{B/A}$$
$$= -(20\mathbf{k}) \times (-0.177\mathbf{i} + 0.177\mathbf{j}) - (10)^2(-0.177\mathbf{i} + 0.177\mathbf{j})$$
$$= \{21.24\mathbf{i} - 14.16\mathbf{j}\}\text{ m/s}^2$$

dir.

BC bağlantı çubuğu (genel düzlemsel hareket): Bulunan $\mathbf{a}_B$ değeri kullanılır ve a_C'nin düşey doğrultuda olduğuna dikkat edilirse,

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_B + \boldsymbol{\alpha}_{\cancel{AB}\,BC} \times \mathbf{r}_{C/B} - \omega_{BC}^2\mathbf{r}_{C/B}$$
$$a_C\mathbf{j} = 21.24\mathbf{i} - 14.16\mathbf{j} + (\alpha_{BC}\mathbf{k}) \times (0.17\mathbf{i} + 0.729\mathbf{j})$$
$$-(2.43)^2(0.176\mathbf{i} + 0.729\mathbf{j})$$
$$a_C\mathbf{j} = 21.24\mathbf{i} - 14.16\mathbf{j} + 0.176\alpha_{BC}\mathbf{j} - 0.729\alpha_{BC}\mathbf{i} - 1.04\mathbf{i} - 4.30\mathbf{j}$$
$$0 = 20.20 - 0.729\alpha_{BC}$$
$$a_C = 0.176\alpha_{BC} - 18.46$$

bulunur. Çözümden

$$\alpha_{BC} = 27.7\text{ rad/s}^2$$
$$a_C = -13.6\text{ m/s}^2$$

Yanıt

elde edilir.

Piston yukarı doğru hareket ettiğinden, a_C'deki eksi işareti pistonun yavaşladığını gösterir, yani $\mathbf{a}_C = \{-13.6\mathbf{j}\}$ m/s²'dir. Bu, pistonun anlık olarak durduğu, AB krank milinin düşey konumuna gelinceye kadar pistonun hızının yavaşlamasına neden olur.