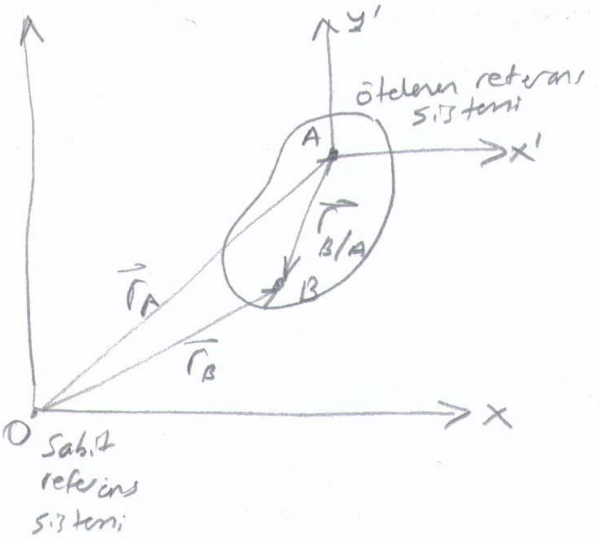
DİNAMİK (10.hafta)

1

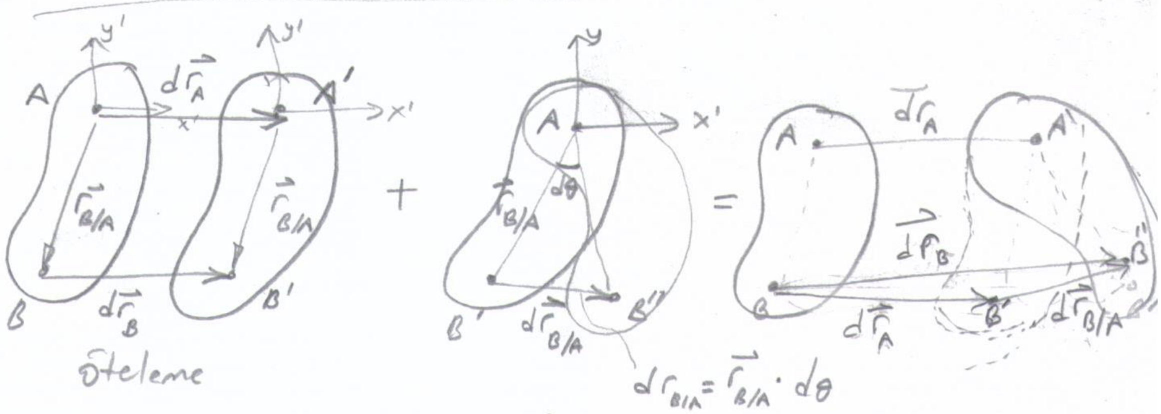
RİJİT CİSMİN BAĞIL HAREKET ANALİZİ (H12)



Rijit cisim düzlemde öteleme ve dönme hareketlerinden oluşan bir hareket yaptığını biliyoruz. Bu iki hareketi bileşenler cinsinden çözmek çoğu zaman daha uygun olur. Bunun için sabit bir eksen takımı ve ötelenen cismin üzerinde bilinen bir noktaya konulan hareketli bir referans sistemi konulur. Buna göre cisim üzerindeki A ve B noktalarının sabit eksene göre konumu $\vec r_A$ ve $\vec r_B$ olur. Ötelenen eksene göre B nin konumu ise $\vec r_{B/A}$ olur. B nin konumu ~~sabit eksene~~ göre

$$\vec r_B = \vec r_A + \vec r_{B/A} \quad \text{olur.}$$

[Mutlak Konum denklemi]



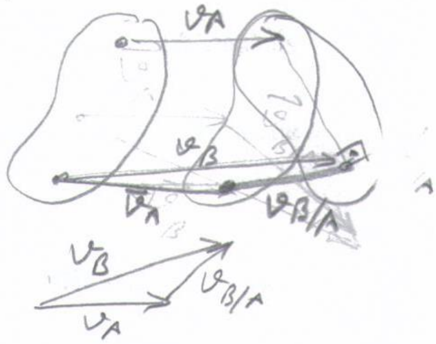
$$dr_{B/A} = r_{B/A} \cdot d\theta$$

$$\underbrace{d\vec r_B}_{\text{öteleme ve A etrafında dönme}} = \underbrace{d\vec r_A}_{\text{öteleme}} + \underbrace{d\vec r_{B/A}}_{\text{A etrafında dönme}}$$

[Yer değiştirme denklemi] ≠ [Bağıl Konum denklemi]

(2)

A ve B noktalarının hızları arasındaki bağıntıyı belirlemek için konum denkleminin zamana göre bir kez türevini almak gerekir.



$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{dr_A}{dt} + \frac{dr_{B/A}}{dt}$$

$$\underbrace{\vec{v}_B}_{\text{B noktasının hızı}} = \underbrace{\vec{V}_A}_{\text{A noktasının hızı}} + \underbrace{\vec{v}_{B/A}}_{\text{B nin A'ya göre bağıl hızı}}$$

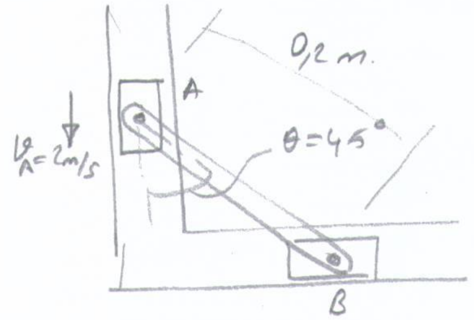
$\boxed{\vec{v}_{B/A} = \vec{r}_{B/A} \cdot \omega}$ skalerdir. Doğrultu $\vec{r}_{B/A}$ ya diktir.

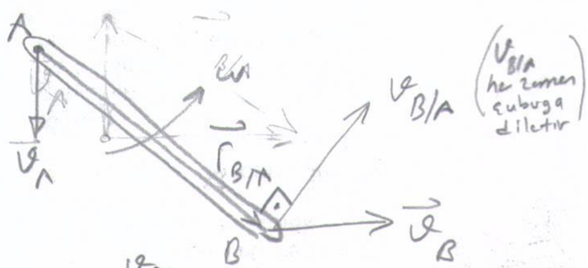
vektörel çarpım

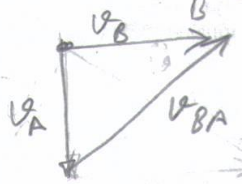
$\boxed{\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}}$ yazılabilir.

Bu denklem bize bütün cismin V_A hızı ile ötelendiğini ve sonra A taban noktası etrafında ω açısal hızı ile döndüğünü gösterir.

Örnek Şekildeki sistemde A ve B pistonları birbirine bağlı olarak kanal içinde hareket etmektedir. A nın hızı aşağıya doğru 2 m/s olduğuna göre B nin $\theta=45°$ olduğu andaki hızını bulunuz.







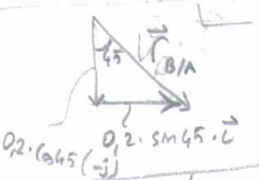
$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A}$$

vektörel çarpım

Birim vektörler cinsinden yazalım. (saatin tersi yönde döndüğü (+))

$$v_B\cdot\vec{i} = v_A\cdot(-\vec{j}) + \omega(\vec{k}) \times \left[0{,}2\cdot\sin45\cdot\vec{i} + 0{,}2\cdot\cos45(-\vec{j})\right]$$



$$\vec{r}_{BA} = \underbrace{(r_{B/A})_x}_{\text{skaler}}\vec{i} + \underbrace{(r_{BA})_y}_{\text{skaler}}\vec{j}$$

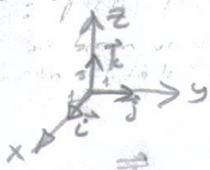
Bir kat daha sadeleştirelim.

$$v_B\vec{i} = -v_A\vec{j} + \omega\vec{k}\times\left(0{,}2\cdot\sin45\,\vec{i} - 0{,}2\cdot\cos45\,\vec{j}\right)$$

→ Devamı diğer sayfada

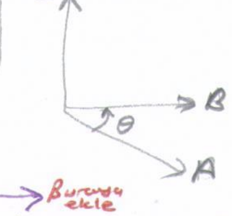
HATIRLATMA = VEKTÖRLER

Birim vektör: Boyu 1 olan ve açısı bilinen vektördür. Bu vektörü skalerle çarpmak yine bir vektör verir. Bu vektörün şiddeti artmıştır fakat açısı yine aynıdır.



$$v\cdot\vec{i} = \vec{v}$$

Vektörel Çarpım



$$\vec{A}\times\vec{B} = C$$

Bir düzlemdeki iki vektörün çarpımı 3. eksendeki bir vektörü verir. Buradaki

$C = A\cdot B\sin\theta$ dır. (Vektör değil)

c) m skaler ile çarpılabilir.

$$m(\vec{A}\times\vec{B}) = m.\vec{A}\times\vec{B} = \vec{A}\times m\vec{B} = (A\times B)m$$

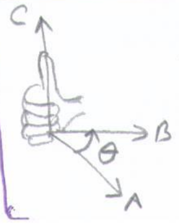
Buraya ekle

a) Değişme özelliği yoktur. $\vec{A}\times\vec{B} \neq \vec{B}\times\vec{A}$ dır. Fakat şu doğrudur

$\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$ olur.

b) Dağılma özelliği vardır.

$$\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{D}) = \vec{A}\times\vec{B} + \vec{A}\times\vec{D}$$



Kartezyen birim vektörlerin çarpımı sağ el kuralına göre bulunur. Pratik olarak şu şemada kullanılabilir.

$\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}$

$\vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}$

$\vec{i}\times\vec{k} = -\vec{j}$

(4)

$$v_B \vec{i} = -v_A \cdot \vec{j} + w \cdot \vec{k} \times \left(0{,}2 \cdot \sin 45 \vec{i} - 0{,}2 \cdot \cos 45 \cdot \vec{j} \right)$$

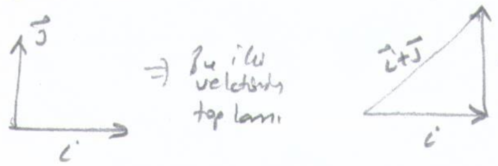
$$v_B \vec{i} = -v_A \cdot \vec{j} + 0{,}2 \cdot w \cdot \sin 45 \underbrace{(\vec{k} \times \vec{i})}_{\vec{j}} - 0{,}2 \cdot w \cdot \cos 45 \underbrace{(\vec{k} \times \vec{j})}_{(-\vec{i})}$$

$$v_B \vec{i} = -v_A \cdot \vec{j} + 0{,}2 \cdot w \cdot \sin 45 \, \vec{j} + 0{,}2 \cdot w \cdot \cos 45 \cdot \vec{i}$$

aynı eksen üzerindeki vektörler toplanır. i ler bir tarafa j ler diğer tarafa atılırsa. $v_A = 2$ idi.

$$\left(v_B - 0{,}2 \cdot w \cdot \cos 45 \right) \vec{i} + \left(0{,}2 \cdot w \cdot \sin 45 - 2 \right) \vec{j} = 0$$

Birbirine dik iki vektörün toplamının sıfır olması aslında vektörlerin şiddetinin olmadığını sıfır olduğunu gösterir.



olur $\vec{i}+\vec{j}=0$ ise vektörlerin ikisininde şiddeti sıfır olur. Birinin şiddeti bile 0 olsa sonuç sıfır gelemez.

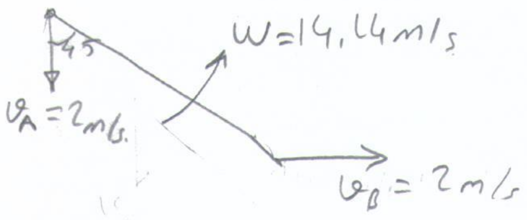
Bu durumda

$$v_B - 0{,}2 \cdot w \cdot \cos 45 \underset{w=14{,}14}{=} 0 \Rightarrow v_B = 0{,}2 \cdot 14{,}14 \cdot \cos 45$$

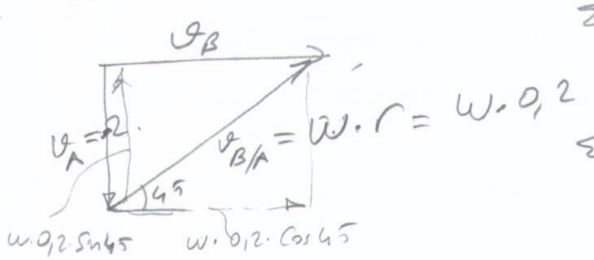
$$v_B = 2 \ m/s. \ (\text{Pozitif} \longrightarrow)$$

$$0{,}2 \cdot w \cdot \sin 45 - 2 = 0 \Rightarrow w = 14{,}14 \ rad/s.$$

(Pozitif saatin tersi yönde olur.)



<u>Skaler Çözmeye çalışalım</u>: Vektörel poligonu (hız vektörlerini) çizebilirsek üzerindeki boy ve açılardan bulabiliriz.



$$\overset{+}{\rightarrow} \sum V_x = 0.$$

$$w \cdot 0{,}2 \cdot \cos 45 + v_B = 0.$$

$$\overset{+}{\uparrow} \sum V_y = 0 \quad -2 + w \cdot 0{,}2 \cdot \sin 45 = 0.$$

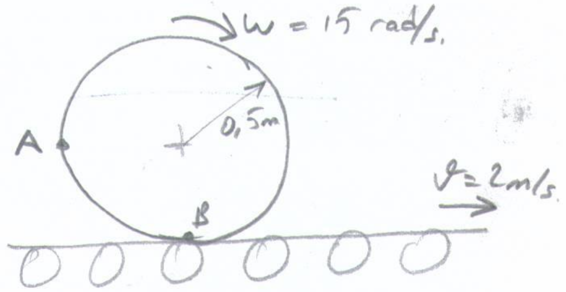
$$w = 14{,}14 \ rad/s.$$

$$14{,}14 \cdot 0{,}2 \cdot \cos 45 + v_B = 0$$

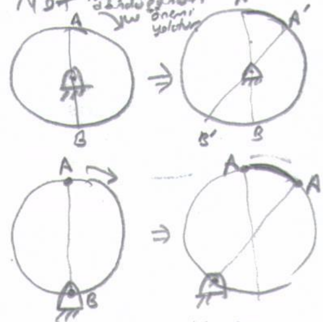
$$v_B = -2 \ m/s.$$

5

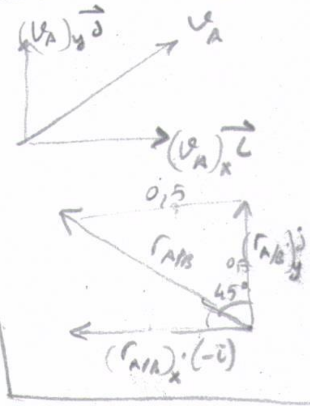
Örnek: Şekildeki gibi bir teker 2 m/s hızla hareket eden bir taşıyıcı bandın yüzeyi üzerinde yuvarlanmaktadır. Silindir ve Bant arasında kayma yok ise A noktasının hızı ne olur? Silindir fotoğrafın çekildiği esnada silindir $\omega = 15$ rad/s lik açısal hıza sahiptir.

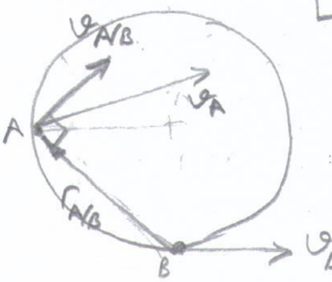


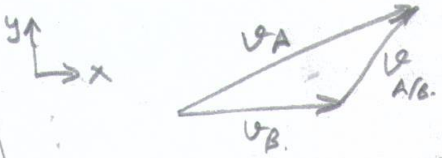
Not: Bir cisim dönerken hangi nokta etrafında döndüğünün önemi yoktur



Vektörleri Bileşenlerine ayırma







$$\vec{\vartheta}_A = \vec{\vartheta}_B + \vec{\vartheta}_{A/B}$$

$$\vec{\vartheta}_A = \vec{\vartheta}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B}$$

Kartezyen koordinatlardaki birim vektörler cinsinden yazalım. Yani x, y eksenlerinde vektörleri bileşenlere ayıralım. Böylelikle vektörlerin şiddeti skaler olarak yazılabilmiş olur.

$$(\vartheta_A)_x \vec{i} + (\vartheta_A)_y \cdot \vec{j} = \vartheta_B \cdot \vec{i} + \omega(-\vec{k}) \times \left((r_{A/B})_x (-\vec{i}) + (r_{A/B})_y \vec{j}\right)$$

saatin yönünde dönüyor (−)   vektörel çarpım

$$(\vartheta_A)_x \vec{i} + (\vartheta_A)_y \vec{j} = \vartheta_B \cdot \vec{i} + \omega \cdot (r_{A/B})_x \cdot \underbrace{(\vec{k} \times \vec{i})}_{+\vec{j}} - \omega \cdot (r_{A/B})_y \cdot \underbrace{(\vec{k} \times \vec{j})}_{-\vec{i}}$$

$$(\vartheta_A)_x \vec{i} + (\vartheta_A)_y \vec{j} = \underbrace{\vartheta_B}_{2 m/s} \vec{i} + \underbrace{\omega}_{15 rad/s} \cdot \underbrace{(r_{A/B})_x}_{0,5} \cdot \vec{j} + \underbrace{\omega}_{15} \cdot \underbrace{(r_{A/B})_y}_{0,5} \cdot \vec{i}$$

$$(\vartheta_A)_x \vec{i} + (\vartheta_A)_y \vec{j} - 2\vec{i} - 7,5 \cdot \vec{j} - 7,5 \cdot \vec{i} = 0$$

$$[(\vartheta_A)_x - 2 - 7,5]\vec{i} + [(\vartheta_A)_y - 7,5]\vec{j} = 0$$

Vektörlerin şiddetleri sıfır olmak zorundadır. Bkz önceki soru.

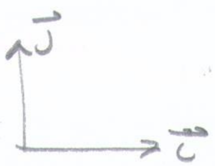
$(\vartheta_A)_x = 9,5$ m/s → $\vartheta_A = \sqrt{9,5^2 + 7,5^2}$

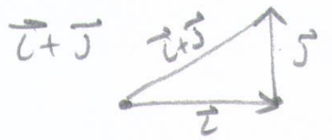
$(\vartheta_A)_y = 7,5$ m/s ↑ $\vartheta_A = 12,1$ m/s

6

Vektörlerin şiddetleri sıfır olmak zorundadır.

Gösterim





her iki vektöründe şiddeti sıfır olursa ancak toplamları sıfır olabilir.

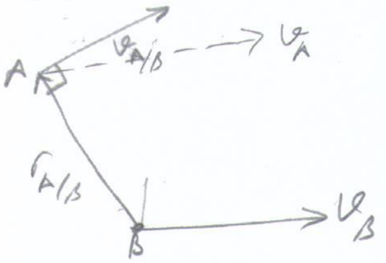
$(v_A)_x - 2 - 7,5 = 0 \Rightarrow (v_A)_x = 9,5 \ m/s \ \rightarrow$

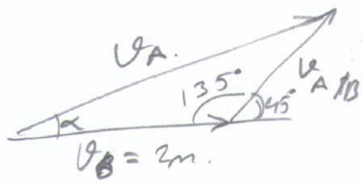
$(v_A)_y - 7,5 = 0 \Rightarrow (v_A)_y = 7,5 \ m/s \ \uparrow$

$v_A = \sqrt{(v_A)_x^2 + (v_A)_y^2} = \sqrt{9,5^2 + 7,5^2} = 12,1 \ m/s.$

$\tan\theta = \frac{(v_A)_y}{(v_A)_x} = \frac{7,5}{9,5} = 0,789 \Rightarrow \theta = 38,29$

İkinci Çözüm Yöntemi: Vektörel poligonu çizip değerleri üzerinde gösterebiliyorsak (her vektörün boy ve açısını biliyorsak) bileşke vektörü de poligondan skala olarak bulabiliriz.





$v_{A/B} = r_{A/B} \cdot w$
$= 0,5\sqrt{2} \cdot 15$
$= 10,6 \ m/s$

Cosinüs teoreminden

$v_A^2 = 2^2 + 10,6^2 - 2.2.10,6.\cos 135$

$v_A = 12,09 \ m/s$

3. yöntem (Vektörel bileşenleri ayrı ayrı toplayalım)

$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}$

$[\nearrow] \quad [\rightarrow] \quad [\angle 45°]$

x ekseni $v_A \cdot \cos\alpha = 2 + 10,6 \cdot \cos 45 = 9,495$

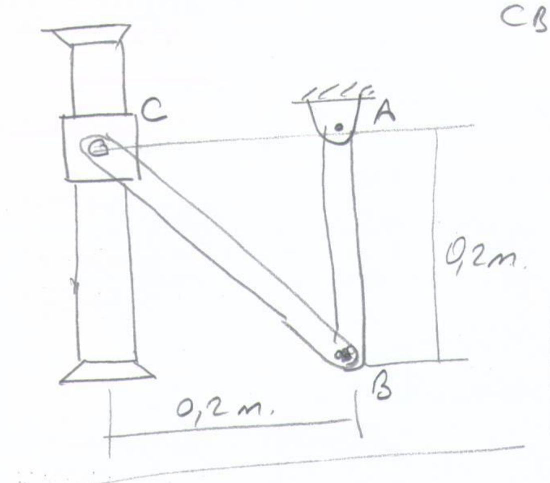
y ekseni $v_A \cdot \sin\alpha = 0 + 10,6 \cdot \sin 45 = 7,495$

$\frac{v_A \cdot \sin\alpha}{v_A \cdot \cos\alpha} = \tan\alpha = \frac{7,495}{9,495} \Rightarrow \alpha = 38,28°$

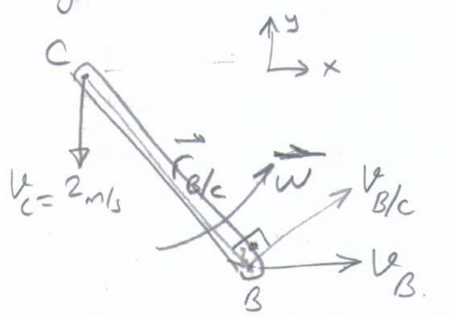
$v_A = 12,1 \ m/s.$

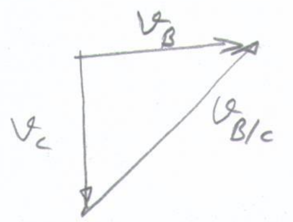
7

Örnek 3 Şekildeki C bileziği 2 m/s lik hızla aşağı doğru hareket etmektedir. CB ve AB çubuklarının bu andaki açısal hızını bulunuz



C bileziği aşağı doğru inerken CB ve AB çubukları saatin tersi yönde dönerler. Her bir çubuğu ayrı ayrı çizip üzerindeki hızları gösterelim ve vektörel hız denklemini yazalım.





$$\vec{v}_B = \vec{v}_C + \vec{v}_{B/C}$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_C + \vec{w} \times \vec{r}_{B/C}$$

$$v_B\cdot\vec{i} = v_C\cdot(-\vec{j}) + w_{CB}\cdot\vec{k}\times\left[(r_{B/C})_x\cdot\vec{i} + (r_{B/C})_y\cdot(-\vec{j})\right]$$

$$v_B\cdot\vec{i} = -v_C\vec{j} + (r_{B/C})_x\cdot w_{CB}\cdot\underbrace{(\vec{k}\times\vec{i})}_{+\vec{j}} - (r_{B/C})_y\cdot w_{CB}\underbrace{(\vec{k}\times\vec{j})}_{-\vec{i}}$$

$$v_B\cdot\vec{i} = -2\cdot\vec{j} + 0{,}2\cdot w_{CB}\vec{j} + 0{,}2\cdot w_{CB}\cdot\vec{i}$$

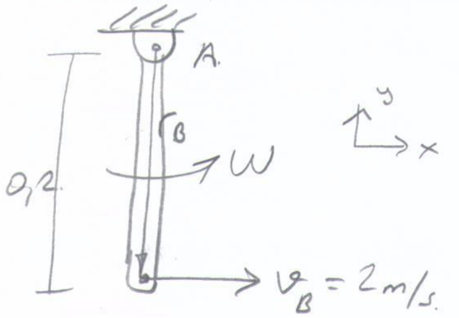
$$v_B\vec{i} + 2\vec{j} - 0{,}2\cdot w_{CB}\vec{j} - 0{,}2\, w_{CB}\vec{i} = 0$$

$$(v_B - 0{,}2\cdot w)\vec{i} + (2 - 0{,}2\, w_{CB})\vec{j} = 0$$

$v_B - 0{,}2\, w_{CB} = 0$ $2 - 0{,}2\, w_{CB} = 0$

$v_B = 0{,}2\cdot 10 = 2$ m/s → $w_{CB} = 10$ rad/s ↺

8



$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}$

$\vec{v}_B = \cancel{\vec{v}_A}^{\,0} + \vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{B/A}$

$\vec{v}_B = \vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_B$ şeklini alır.

$v_B \cdot \vec{i} = \omega_{AB} \vec{k} \times r_B \cdot (-\vec{j})$

$v_B \cdot \vec{i} = \omega_{AB} \cdot r_B \cdot (\underbrace{\vec{k} \times (-\vec{j})}_{-(-i)})$

$v_B \cdot \vec{i} = +\omega_{AB} \cdot r_B \cdot \vec{i}$

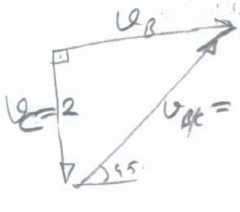
$v_B \cdot \vec{i} - \omega_{AB} \cdot r_B \vec{i} = 0$

$(v_B - \omega_{AB} r_B)\vec{i} = 0$

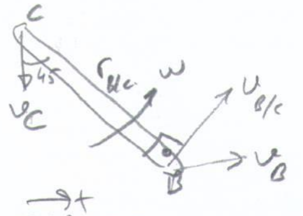
$v_B - \omega_{AB} r_B = 0$

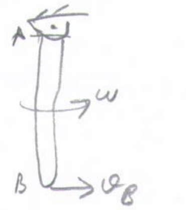
$2 - 0{,}2 \cdot \omega_{AB} = 0 \Rightarrow \omega_{AB} = 10$ rad/s

Skaler çözüm: Vektörel poligonu çizdikten sonra geometrik yolla hesaplayabiliriz.



$v_{B/C} = r_{B/C} \cdot \omega = 0{,}2\sqrt{2} \cdot \omega$





$v_B = \vec{v}_C + \vec{v}_{B/C}$

[→] [↓] [↗45]

$\sum \vec{v}_x = 0$ (→+)

x bileşenleri yazalım.

$v_B = 0 + \omega_{CB} \, 0{,}2\sqrt{2} \cdot \cos 45$

y bileşenleri yazalım

$0 = -2 + \omega_{CB} \, 0{,}2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin 45$

$\omega_{CB} = 10$ rad/s

$v_B = 10 \cdot 0{,}2 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 45 = 2$ m/s →

$v_B = r_{AB} \cdot \omega_{AB}$

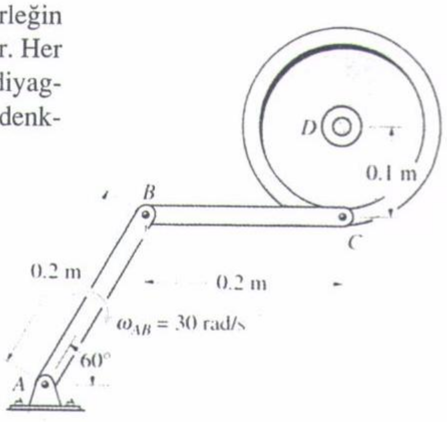
$2 = 0{,}2 \cdot \omega_{AB}$

$\omega_{AB} = 10$ rad/s

Şekil 16–16*a*'da gösterilen bağlantının *AB* çubuğu $\theta = 60°$ olduğu anda 30 rad ~~m~~/s'lik saat yönlü bir açısal hıza sahiptir. Bağlantının *BC* kolunun ve tekerleğin bu andaki açısal hızlarını belirleyiniz.

ÇÖZÜM (VEKTÖREL ANALİZ)

Kinematik Diyagram. *B* ve *C* noktalarının hızlarının *AB* kolu ve tekerleğin kendi sabit eksenleri etrafında dönmesiyle tanımlandığı görülmektedir. Her bir kolun konum vektörü ve açısal hızı Şekil 16–16*b*'deki kinematik diyagramda gösterilmektedir. Çözüm için, her bir kolun uygun kinematik denklemini yazacağız.



(a)

Hız Denklemi.
AB bağlantısı için (sabit bir eksen etrafında dönme):

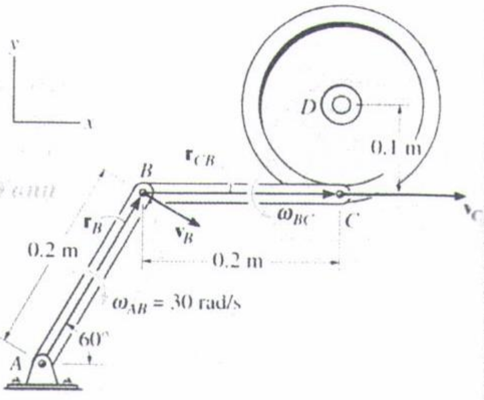
$$\mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{r}_B$$
$$= (-30\mathbf{k}) \times (0.2 \cos 60°\mathbf{i} + 0.2 \sin 60°\mathbf{j})$$
$$= \{5.20\mathbf{i} - 3.0\mathbf{j}\} \text{ m/s}$$

olur. *BC* bağlantısı için (genel düzlemsel hareket):

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega}_{BC} \times \mathbf{r}_{C/B}$$
$$v_C\mathbf{i} = 5.20\mathbf{i} - 3.0\mathbf{j} + (\omega_{BC}\mathbf{k}) \times (0.2\mathbf{i})$$
$$v_C\mathbf{i} = 5.20\mathbf{i} + (0.2\omega_{BC} - 3.0)\mathbf{j}$$
$$v_C = 5.20 \text{ m/s}$$
$$0 = 0.2\omega_{BC} - 3.0$$
$$\omega_{BC} = 15 \text{ rad/s} \circlearrowleft$$

olur. Tekerlek için (sabit bir eksen etrafında dönme):

$$\mathbf{v}_C = \boldsymbol{\omega}_D \times \mathbf{r}_C$$
$$5.20\mathbf{i} = (\omega_D\mathbf{k}) \times (-0.1\mathbf{j})$$
$$5.20 = 0.1\omega_D$$
$$\omega_D = 52 \text{ rad/s} \circlearrowleft$$



(b)

Şekil 16–16

bulunur.

Şekil 16–16*a*'dan $v_B = (0.2)(30) = 6$ m/s, $\searrow$ 30° olduğu ve $\mathbf{v}_C$'nin sağa doğru yönlendiği anlaşılmaktadır. Bir alıştırma olarak, bu bilgiyi ve $\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{C/B}$'nın skaler bileşen denklemlerini kullanarak ω_{BC}'yi elde etmeye çalışınız.